

The QWorld

モノイダル圏および量子力学のためのストリング図式生成

v1.1.2

新名亮太

qworld-package@googlegroups.com

2025年7月28日

概要

QWorld は、モノイダル圏における図式計算を直感的かつ効率的に描画するために設計された L^AT_EX パッケージである。特に、圏論的手法が重要な役割を果たす量子論、トポロジカル量子計算、及び関連分野における図式的推論の可視化を支援する。本パッケージは TikZ [1] を基盤としており、シンプルなコマンドで複雑な図式を容易に描画できる。

目次

1	導入	2
2	基本的な使い方	2
2.1	基本要素	2
2.2	数式モード	4
2.3	インストール	4
3	基本的なカスタマイズ	5
3.1	識別番号	5
3.2	バウンディングボックス	6
3.3	ボックスのカスタマイズ	10
3.4	繰り返し	16
3.5	識別番号の表示	16
3.6	色	17
3.7	相対座標	19
3.8	絶対座標	20
3.9	ワイヤーのカスタマイズ	22
3.10	キャンバス	27
4	モノイダル圏と QWorld	29
4.1	圏	30
4.1.1	対象情報と色	31
4.2	モノイダル圏	33
4.2.1	交換則	33
4.3	特殊ボックス	35
4.3.1	ゼロ入力	35
4.3.2	ゼロ出力	35
4.3.3	ゼロ入力ゼロ出力	35
4.4	モノイド対象	37
4.4.1	フロベニウス則	39
4.5	組紐	41
4.5.1	双代数	49
4.5.2	ホップ代数	50

4.5.3	平衡圏	51
4.5.4	色	52
4.6	双対性	53
4.6.1	転置ボックス	54
4.6.2	コピー禁止定理	56
4.7	ピポタル圏	64
4.7.1	トレース	69
4.7.2	コンパクト圏	70
4.7.3	色	71
4.8	ダガー	72
4.8.1	随伴ボックス	72
4.8.2	共役ボックス	73
5	素子一覧	74
	参考文献	75



1 導入


本稿では, QWorld パッケージのインストール方法, 基本的な使用法, 応用例を体系的に解説する. QWorld は, モノイダル圏に基づく図式言語の組版に特化した L^AT_EX パッケージであり, モノイダル圏, フロベニウス構造, 組紐, ホップ代数, シンメトリー, 双対性, ピポタル構造, ダガーなど, 多岐にわたる圏論的概念を図式表現するための直感的なコマンドセットを提供する.



2 基本的な使い方

2.1 基本要素

QWorld パッケージの最も基本的なコマンドを以下に示す. これらは図式を描画するための基礎となる.

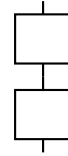
- `\q`: 図の素子を配置するためのキャンバス.
- `\qbox`: ボックス  の描画.
- `\qwire`: ワイヤー  の描画.
- `\qcirc`: 合成.

これらのコマンドは, キャンバスである `\q{...}` 内に記述する. 例えば `\q{\qbox}` と記述すると, ボックス  が描画される.

 と  を合成するためには, `\qcirc` を使用する. これは数学における合成 $g \circ f$ (`\(g\circ f\)`) と似ている.

例 2.1

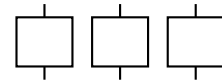
```
\q{ \qbox \qcirc \qbox }
```



また, `\qbox` を並置すると, 描画結果でもボックス \square が横に並ぶ:

例 2.2

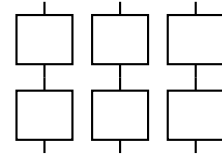
```
\q{ \qbox \qbox \qbox }
```



`\qcirc` を用いて複数のボックスを合成することも可能である:

例 2.3

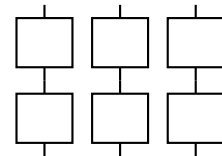
```
\q
{
  \qbox \qbox \qbox
  \qcirc
  \qbox \qbox \qbox
}
```



なお, `\n` は `\qcirc` と同義である:

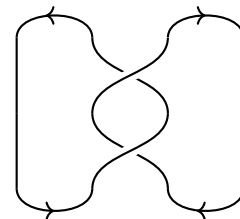
例 2.4

```
\q
{
  \qbox \qbox \qbox \n
  \qbox \qbox \qbox
}
```



例 2.5

```
\q{
  \qcaprev \qcap \n
  \qwiring \qbraid \qwiring \n
  \qwiring \qbraid \qwiring \n
  \qcup \qcuprev
}
```



`\qcaprev` は \frown を, `\qcap` は \smile を, `\qwiring` は $|$ を, `\qbraid` は \times を, `\qcup` は \cup を, `\qcuprev` は \cap を, 各々描画する. 全体として, コマンドの配置の通りに描画されていることが分

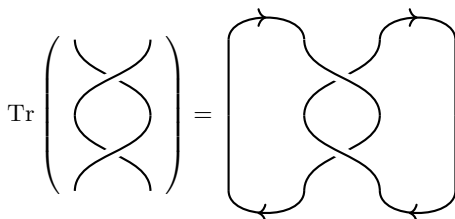
かる.

2.2 数式モード

図式言語を含んだ数式を記述する場合は, 数式モードを使用する.

例 2.6

```
\[
  \operatorname{Tr}\left(
    \q{
      \qbraid\n
      \qbraid
    }
  \right)
  =\q{
    \qcap \qcap \n
    \qwiring \qbraidinv \qwiring \n
    \qwiring \qbraidinv \qwiring \n
    \qcupprev \qcupprev
  }
\]
```

$$\operatorname{Tr} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} \right) = \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array}$$


2.3 インストール

QWorld パッケージのスタイルファイル `qworld.sty` は, CTAN 上の以下のページから入手可能である:

<https://ctan.org/pkg/qworld>

ダウンロードしたファイルを $\text{T}_\text{E}\text{X}$ のパッケージディレクトリに配置し, プリアンブルに以下を記述することで使用可能となる:

```
\usepackage{qworld}
```

パッケージが $\text{T}_\text{E}\text{X}$ ディストリビューションに含まれている場合は, `tlmgr` や `MiKTeX Console` などを利用してインストールすることもできる.

■依存関係 依存パッケージは以下の通りである:

- TikZ
 - cd
 - positioning
 - arrows
 - arrows.meta
 - calc
 - intersections
 - shapes.symbols
 - shapes.geometric
 - shapes.misc
 - decorations.pathreplacing
 - decorations.markings
 - decorations.pathmorphing
- pgffor
- ifthen
- xparse
- xfp
- xstring

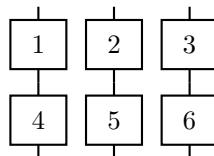
これらのパッケージは T_EX Live ディストリビューションに標準で含まれており, 特別な手間をかける必要はない.

3 基本的なカスタマイズ

本節では, QWorld のコマンドをカスタマイズする方法を解説する.

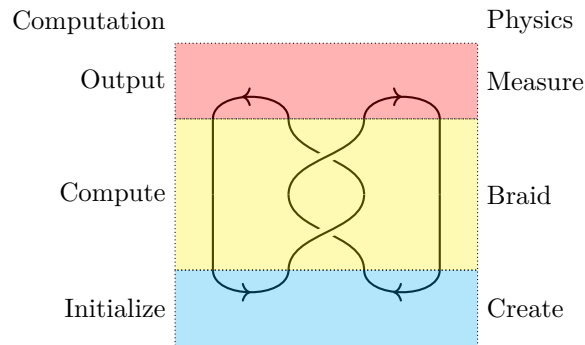
3.1 識別番号

`\q{...}`内に配置された全てのコマンドには, 実行順に基づいて自動的に固有の識別番号が割り当てられる. 例えば, 先の例 2.4 では各`\qbox`に番号が振られる:



詳細は, 16 ページの 3.5 節を参照せよ.

3.2 バウンディングボックス



各素子には、バウンディングボックスが付随する。以下に例を示す:

- のバウンディングボックスを可視化すると .
- のバウンディングボックスを可視化すると .
- のバウンディングボックスを可視化すると .
- のバウンディングボックスを可視化すると .

バウンディングボックスを可視化するコマンドと、可視化したバウンディングボックス近辺にテキストを置くコマンドは次の通りである:

- 可視化
 - `\qbb`: 特定の素子のバウンディングボックスを表示.
 - `\qbball`: 全ての素子のバウンディングボックスを一度に表示.
 - `\qBBall`: キャンバス全体を囲むバウンディングボックスをを表示.
- テキストを置く
 - `\bbsymbol`: バウンディングボックスにテキストを配置.

`\qbb[<色>][<ID 列>]`

- 第一引数 (オプション): 色を指定. 未指定の場合は無色.
- 第二引数: 対象となる素子の識別番号のリストを指定し, それらを含むバウンディングボックスを表示.

例 3.1

`\q{\qbox\qbb[1]}`

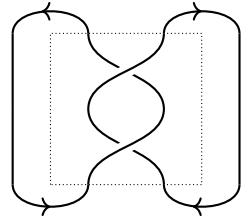


例 3.2

```

\qf
  \qcaprev \qcap      \n
  \qwire   \qbraid \qwire \n
  \qwire   \qbraid \qwire \n
  \qcup    \qcupprev
  \qbb[4,7]
}

```

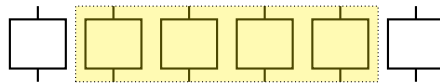


例 3.3

```

\qf\qbox\qbox\qbox\qbox\qbox\qbox\qbb[yellow][2,...,5]}

```

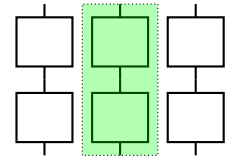


例 3.4

```

\q
{
  \qbox\qbox\qbox\n
  \qbox\qbox\qbox
  \qbb[green][2,5]
}

```

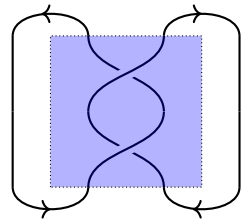


例 3.5

```

\qf
  \qcaprev \qcap      \n
  \qwire   \qbraid \qwire \n
  \qwire   \qbraid \qwire \n
  \qcup    \qcupprev
  \qbb[blue][4,7]
}

```

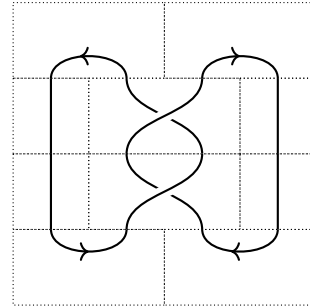


`\qbball[<色>]`

複数 (一個でも良いが) のバウンディングボックスを一度に可視化する.

例 3.6

```
\q{
  \qcaprev \qcap      \n
  \qwire   \qbraid \qwire \n
  \qwire   \qbraid \qwire \n
  \qcup    \qcupprev
  \qbball
}
```



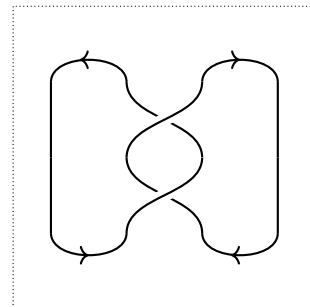
各素子のバウンディングボックスが重なることなく組み合っていることが判る。QWorld パッケージは、図式描画に伴う細かく面倒な座標設定の多くを省略できる。

`\qBBall[<色>]`

キャンパス内の全素子を囲むバウンディングボックスを表示する。

例 3.7

```
\q{
  \qcaprev \qcap      \n
  \qwire   \qbraid \qwire \n
  \qwire   \qbraid \qwire \n
  \qcup    \qcupprev
  \qBBall
}
```



`\bbsymbol[<方角>]{<text>}[<オプション>]`

直前のバウンディングボックスにテキストを配置する。

- 第一引数 (オプション): N (北), S (南), E (東), W (西), NW (北西), NE (北東), SE (南東), SW (南西) のいずれかを指定。デフォルトは E.
- 第二引数: 配置するテキスト。
- 第三引数 (オプション): 位置調整 (例: above, below, left, right). デフォルトは right.

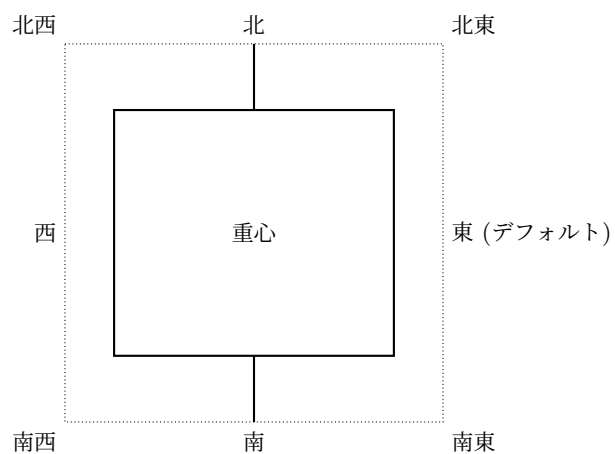
例 3.8

```
\q[scale=5]{
  \qbox
  \qbb[1]
  \bbsymbol{東 (デフォルト)}
  \bbsymbol[W]{西}[left]
  \bbsymbol[N]{北}[above]
```

```

\bbssymbol[S]{南}[below]
\bbssymbol[NE]{北東}[above right]
\bbssymbol[NW]{北西}[above left]
\bbssymbol[SE]{南東}[below right]
\bbssymbol[SW]{南西}[below left]
\bbssymbol[C]{重心}[]
}

```

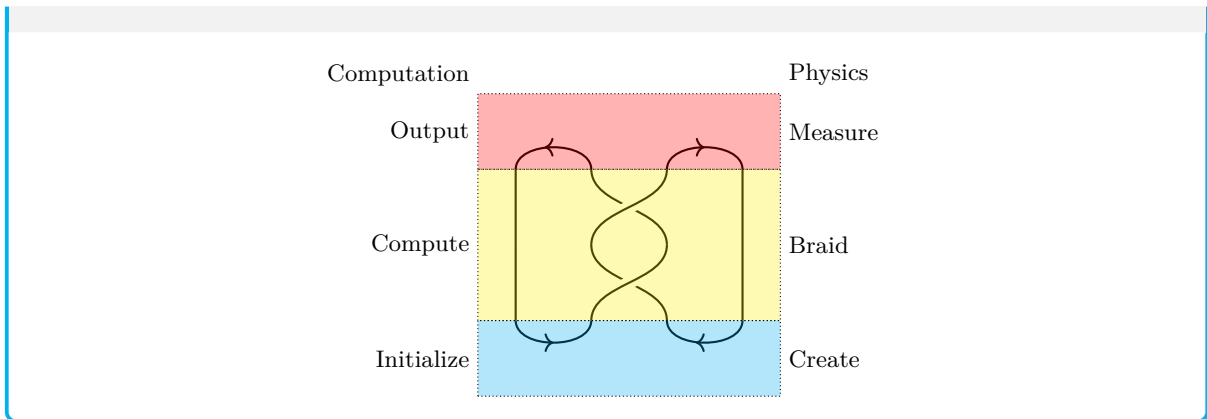


例 3.9

```

\q
{
  \qcaprev \qcap \n
  \qwire \qbraid \qwire \n
  \qwire \qbraid \qwire \n
  \qcup \qcuprev
  \qbb[red][1,2]
  \bbssymbol{Measure}
  \bbssymbol[W]{Output}[left]
  \bbssymbol[NW]{Computation}[above left]
  \bbssymbol[NE]{Physics}[above right]
  \qbb[yellow][3,5,6,8]
  \bbssymbol{Braid}
  \bbssymbol[W]{Compute}[left]
  \qbb[cyan][9,10]
  \bbssymbol{Create}
  \bbssymbol[W]{Initialize}[left]
}

```



3.3 ボックスのカスタマイズ

キーを使い、ボックスの経線の数や配置を調整できる。例えば以下のようなボックスが描画可能である：

-
-

これらのキーはワイヤー以外の多くの素子にも適用可能である。主要なキーは以下の通り：

- **n**
 - ボックス の北縁において経線 | を生やすことができる点 (このような点を **n** 端子と呼ぶこととする) の数.
 - 例えば $n=3$ とすれば、ボックスの北縁に 3 点等間隔に打つことができる.
 - デフォルト値は $n=1$.
 - **n** 端子を最北端まで垂直移動させた点を **N** 端子と呼ぶ.
 - **n** 端子及び **N** 端子は西 (左) から順に $1, 2, \dots$ と添え字付けられる.
 - i 番目の **n** 端子に経線を生やすとは、 i 番目の **n** 端子と i 番目の **N** 端子を線分で結ぶことをいう.
- **N**
 - 経線を実際に生やす **n** 端子の添え字の集合.
 - 例えば $n=3$ とした上で $N=\{2\}$ とすれば、3 点のうち 2 番目の **n** 端子に経線を生やすことができる.
 - **n** が未指定で、**N** が指定されているときは、自動で $n := \max N$ となる.
 - **N** が未指定で、**n** が指定されているときは、自動で $N := \{1, \dots, n\}$ となる.
 - **n** 端子から実際に生えた経線の最北端を出力点、あるいは **0** 端子と呼ぶこととする.
- **s**
 - ボックスの南縁において経線を生やすことができる点 (このような点を **s** 端子と呼ぶこととする) の数.
 - 例えば $s=4$ とすれば、ボックスの南縁に 4 点等間隔に打つことができる.
 - デフォルト値は $s=1$.
 - **s** 端子を最南端まで垂直移動させた点を **S** 端子と呼ぶ.
 - **s** 端子及び **S** 端子は西 (左) から順に $1, 2, \dots$ と添え字付けられる.

- i 番目の s 端子に経線を生やすとは, i 番目の s 端子と i 番目の S 端子を線分で結ぶことをいう.
- S
 - 経線を実際に生やす s 端子の添え字の集合.
 - 例えば $s=4$ とした上で $S=\{1,4\}$ とすれば, 4 点のうち 1 番目と 4 番目の点に経線を生やすことができる.
 - s が未指定で, S が指定されているときは, 自動で $s := \max S$ となる.
 - S が未指定で, s が指定されているときは, 自動で $S := \{1, \dots, s\}$ となる.
 - s 端子から実際に生えた経線の最南端を入力点, あるいは I 端子と呼ぶこととする.
- $hlen$
 - 水平方向のバウンディングボックスの長さ.
 - 例えば $hlen=2$ とすれば, 水平方向のバウンディングボックスの長さが 2 となる.
 - 唯一つの例外を除いて, 最西端の経線とバウンディングボックスの境界線との距離, 最東端の経線とバウンディングボックスの境界線との距離はともに 0.5 である.
 - $hlen$ が未指定であるとき, n 端子及び s 端子は, 間隔を 1 に保って並べられる.
 - $hlen$ が指定されているとき, n 端子及び s 端子は, 長さ $hlen - 1$ の区間を等間隔に並べられる. このときの端子の間隔は $hlen$ 及び端子の数に依存する.
 - * 端子の数が 1 つであるときは, 区間の中心に置かれる. このとき, $hlen > 1$ であるならば, 最西端の経線とバウンディングボックスの境界線との距離, 及び最東端の経線とバウンディングボックスの境界線との距離はともに $\frac{hlen}{2} > 0.5$ である.
- $vlen$
 - 垂直方向のバウンディングボックスの長さ (高さ).
 - デフォルト値は $vlen=1$.
- id
 - ボックスの識別子.
 - 例えば $id=ID$ とすれば, ここまで登場した様々な点に次のような名前が自動的に付けられる:
 - * (西から数えて) i 番目の n 端子: $(n-i-ID)$
 - * i 番目の s 端子: $(s-i-ID)$
 - * i 番目の n 端子をボックスの北縁へ垂直移動させた点: $(N-i-ID)$
 - * i 番目の s 端子をボックスの南縁へ垂直移動させた点: $(S-i-ID)$
 - * バウンディングボックスの最北西端: $(NW-ID)$
 - * バウンディングボックスの最北東端: $(NE-ID)$
 - * バウンディングボックスの最南西端: $(SW-ID)$
 - * バウンディングボックスの最南東端: $(SE-ID)$
 - * バウンディングボックスの最北端: $(N-ID)$
 - * バウンディングボックスの最南端: $(S-ID)$
 - * バウンディングボックスの最西端: $(W-ID)$
 - * バウンディングボックスの最東端: $(E-ID)$
 - * バウンディングボックスの重心: $(C-ID)$
 - * ボックスの最北西端: $(nw-ID)$
 - * ボックスの最北東端: $(ne-ID)$

- * ボックスの最南西端: (sw-ID)
 - * ボックスの最南東端: (se-ID)
 - * ボックスの最北端: (n-ID)
 - * ボックスの最南端: (s-ID)
 - * ボックスの最西端: (w-ID)
 - * ボックスの最東端: (e-ID)
 - * i 番目の出力点: (O- i -ID)
 - * i 番目の入力点: (I- i -ID)
- 指定の有無にかかわらず、`\q{...}`内に置かれた各コマンドには識別番号が振られている。各々 ID 部分をその番号に置き換えても同じ点を表す。詳細は 3.5 節を確認されたい。
- p, P
 - 正整数 k に対して、 $p=k$ は $n=k$, $s=k$ を意味する。
 - 正整数の有限集合 K に対して、 $P=K$ は $N=K$, $S=K$ を意味する。
 - name
 - `name=<text>` により、ボックスの重心に<text>が置かれる。

例 3.10

```

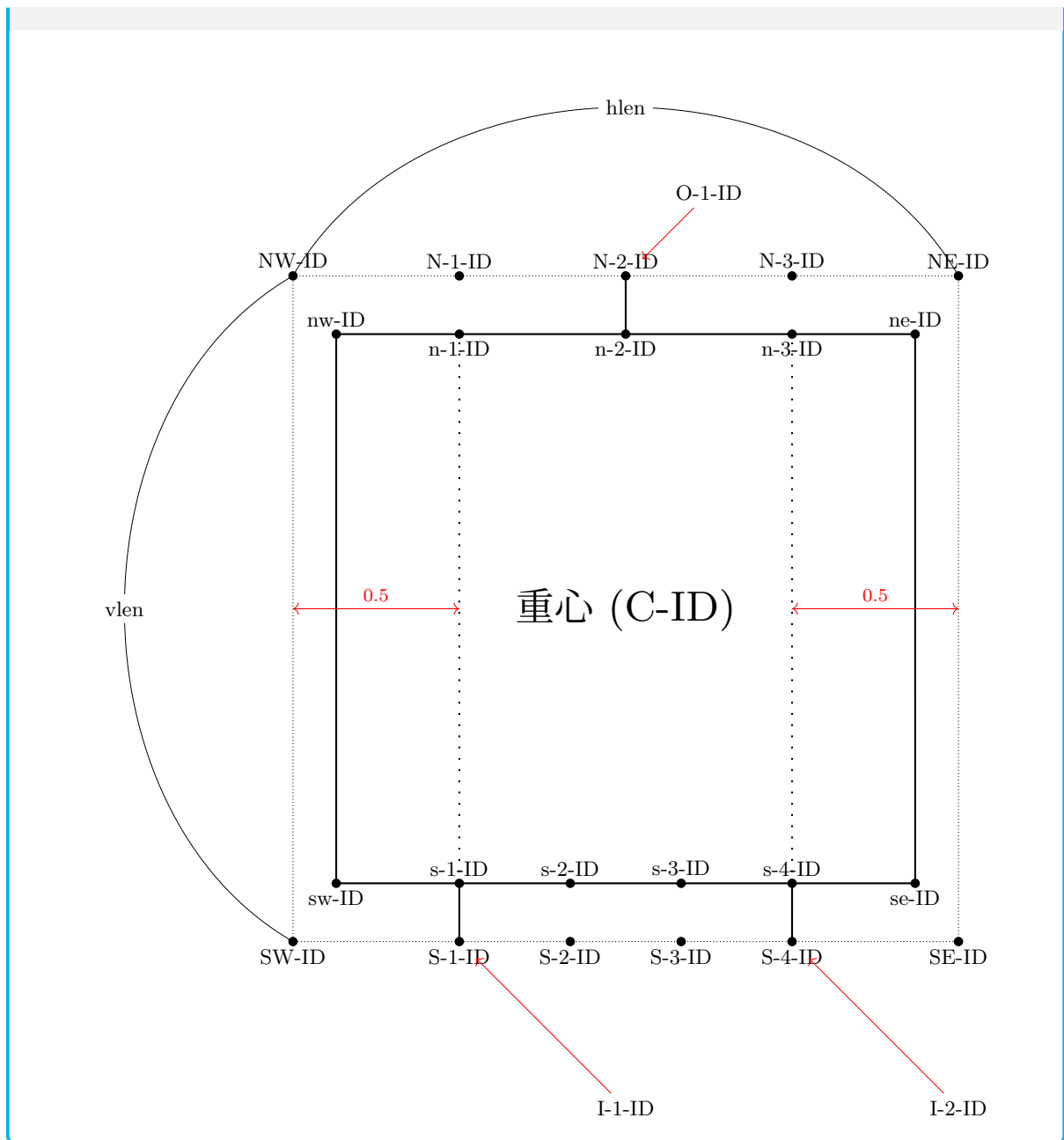
\def\pradius{0.4pt}
\q[scale=5]
{
  \qbox
  [
    n=3,N={2},
    s=4,S={1,4},
    hlen=2,
    vlen=2,
    id={ID},
    name={重心 (C-ID)}
  ]\n
  \qbb[ID]
  \node [above] at (NE-ID) {NE-ID};
  \node [above] at (NW-ID) {NW-ID};
  \node [below] at (SE-ID) {SE-ID};
  \node [below] at (SW-ID) {SW-ID};
  \fill (NE-ID) circle (\pradius);
  \fill (NW-ID) circle (\pradius);
  \fill (SE-ID) circle (\pradius);
  \fill (SW-ID) circle (\pradius);
  \node [above] at (ne-ID) {ne-ID};
  \node [above] at (nw-ID) {nw-ID};
  \node [below] at (se-ID) {se-ID};
  \node [below] at (sw-ID) {sw-ID};
  \fill (ne-ID) circle (\pradius);
  \fill (nw-ID) circle (\pradius);

```

```

\fill (se-ID) circle (\pradius);
\fill (sw-ID) circle (\pradius);
\foreach\i in {1,...,3}
{
  \symboln[\i]{n-\i-ID}[below]
  \fill (n-\i-ID) circle (\pradius);
  \symbolN[\i]{N-\i-ID}
  \fill (N-\i-ID) circle (\pradius);
}
\foreach\i in {1,...,4}
{
  \symbols[\i]{s-\i-ID}[above]
  \fill (s-\i-ID) circle (\pradius);
  \symbolS[\i]{S-\i-ID}[below]
  \fill (S-\i-ID) circle (\pradius);
}
\draw[line width=0.2pt] (NW-ID)
  to [bend left=60] node [fill=white, midway] {hlen} (NE-ID);
\draw[line width=0.2pt] (NW-ID)
  to [bend right=60] node [fill=white, midway] {vlen} (SW-ID);
\draw [red, <->] (C-ID -| W-ID)
  -- node [midway, auto, font=\footnotesize] {0.5} (C-ID -| S-1-ID);
\draw [red, <->] (C-ID -| S-4-ID)
  -- node [midway, auto, font=\footnotesize] {0.5} (C-ID -| E-ID);
\qwire[arrowtype={loosely dotted}, dom={s-1-ID}, cod={n-1-ID}]
\qwire[arrowtype={loosely dotted}, dom={s-4-ID}, cod={n-3-ID}]
\node (O1prime) at ([shift={(0.25,0.25)}]0-1-ID){0-1-ID};
\draw[->,red] (O1prime) to ([shift={(0.05,0.05)}]0-1-ID);
\node (I1prime) at ([shift={(0.5,-0.5)}]I-1-ID){I-1-ID};
\node (I2prime) at ([shift={(0.5,-0.5)}]I-2-ID) {I-2-ID};
\draw[->,red](I1prime) to ([shift={(0.05,-0.05)}]I-1-ID);
\draw[->,red](I2prime) to ([shift={(0.05,-0.05)}]I-2-ID);
}

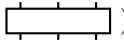
```



\qwire の arrowtype キーと dom, cod キーは 22 ページの 3.9 節にて説明する。

■ラベル (\symbol)

\symbolI[<番号>]{<label>}[<オプション>]

例えば, \symbolI[2]{text}[below right, id=<ID>] により, \q{\qbox[p=3, id=ID]} () の 2 番目の入力点 (I-2-ID) の右下に “text” が置かれる。番号とオプションの指定のないときは, デフォルト値 1, below, id=<直前のもの> が各々適用される。他にもラベル表示コマンドとして,

\symbolS[<番号>]{<label>}[<オプション>]

`\symbols[<番号>]{<label>}[<オプション>]`

`\symbol0[<番号>]{<label>}[<オプション>]`

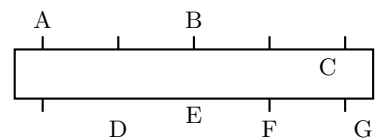
`\symbolN[<番号>]{<label>}[<オプション>]`

`\symboln[<番号>]{<label>}[<オプション>]`

がある。 `\symbolS`, `\symbols` はそれぞれ点 (S- i -ID), (s - i -ID) に `<label>` を置く。番号 i のデフォルト値は 1, オプションのデフォルト値は `below` である。 `\symbol0`, `\symbolN`, `\symboln` はそれぞれ点 (O- i -ID), (N - i -ID), (n - i -ID) に `<label>` を置く。番号 i のデフォルト値は 1, オプションのデフォルト値は `above` である。

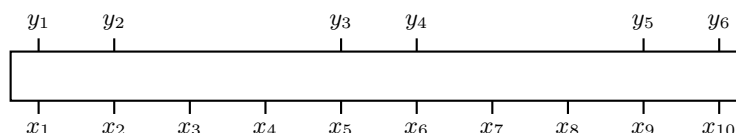
例 3.11

```
\qf{
  \qbox[p=5, S={1,4,5}, id=ID]
  \symbol0{A}
  \symbolN[3]{B}
  \symboln[5]{C}[below left]
  \symbolS[2]{D}
  \symbols[3]{E}
  \symbolI[2]{F}
  \symbolI[3]{G}[below right]
}
```



例 3.12

```
\qf{
  \qbox[p=10, N={1,2,5,6,9,10}, id=ID]
  \foreach\i in {1,...,10}
  {
    \symbolI[\i]{\(\x_{\i}\)}
  }
  \foreach\j in {1,...,6}
  {
    \symbol0[\j]{\(\y_{\j}\)}
  }
}
```



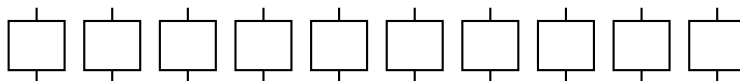
3.4 繰り返し

`\qloop[<回数>]{<コマンド>}`

`\qloop` コマンドを用いれば、指定した回数だけコマンドを繰り返せる:

例 3.13

```
\q{ \qloop[10]{\qbox} }
```



`\qloop` コマンドは`\q` 外でも使用可能である:

例 3.14

```
結論だけ、書く.\par  
\qloop[20]{失敗した}\par  
あたしは\qloop[10]{失敗した}
```

結論だけ、書く.

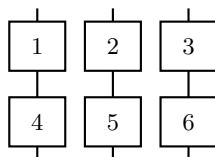
失敗した 失敗した 失敗した 失敗した 失敗した 失敗した 失敗した 失敗した 失敗した 失敗した 失敗した
失敗した 失敗した 失敗した 失敗した 失敗した 失敗した 失敗した 失敗した 失敗した
あたしは 失敗した 失敗した 失敗した 失敗した 失敗した 失敗した 失敗した 失敗した 失敗した 失敗した

3.5 識別番号の表示

`\q{...}` 内のコマンドには自動的に識別番号が付与される. `show id=true` を指定すると、それらが表示される.

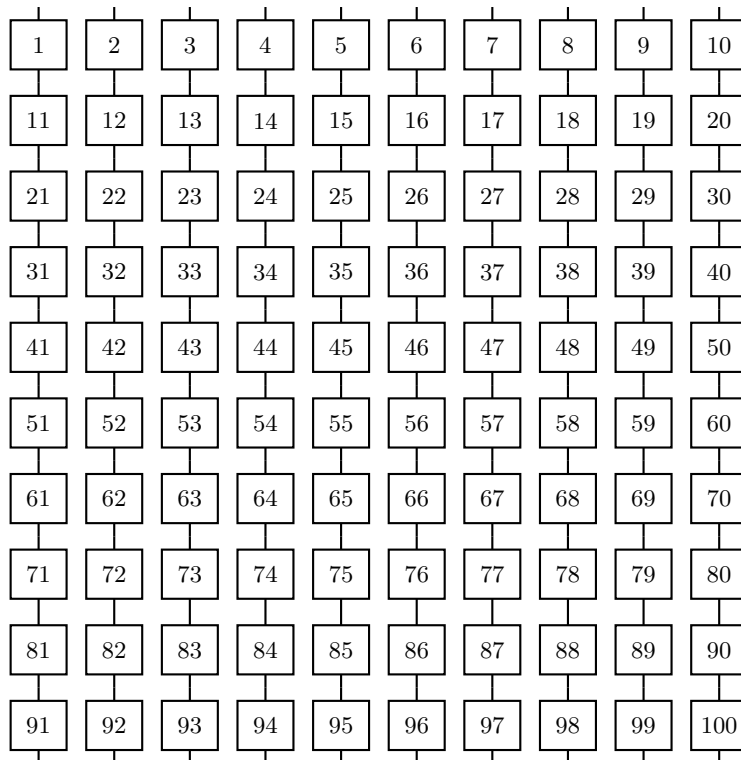
例 3.15

```
\q{  
  \qbox[show id={true}] \qbox[show id={true}] \qbox[show id={true}]\n  
  \qbox[show id={true}] \qbox[show id={true}] \qbox[show id={true}]  
}
```






例 3.16

```
\q
{
  \qloop[10]
  {
    \qloop[10]
    {
      \qbox[show id={true}]
    }\n
  }\n
}
```



3.6 色

ボックスに三種類の色属性を指定できる:

- **color**
 - ボックス内部の色, 例えば `color=green` により 
- **frame color**
 - ボックスの枠の色, 例えば `frame color=cyan` により 
- **morphism color**
 - ボックス内の射の色, 例えば `morphism color=red` により 

例 3.17

```

\q
{
  \qbox
  [
    name={\langle f \rangle},
    color=red,
    frame color={green!50!black},
    morphism color=yellow
  ]
}

```

**組紐, シンメトリー, キャップ, カップの色指定**

組紐, シンメトリー, キャップ, カップといった一部の射は, 図式上では箱ではなく曲線として描画される. これらには明確な内部領域が存在せず, 射のラベルも通常付けないため, `color` 及び `morphism color` は適用されない.

■ **N, S, 等差数列** `QWorld` は `pgffor` パッケージをロードしているため, リストに対して... を用いた省略記法が使用できる:

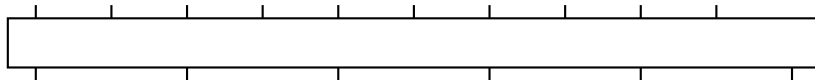
- 1, ..., 10: 公差 1 の等差数列
- 1, 3, ..., 11: 最初の二項に基づいた公差の等差数列

例 3.18

```

\q{
  \qbox[N={1, ..., 10}, S={1, 3, ..., 11}]
}

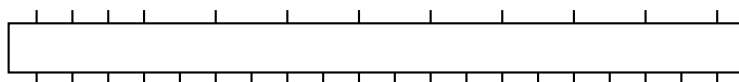
```

**例 3.19**

```

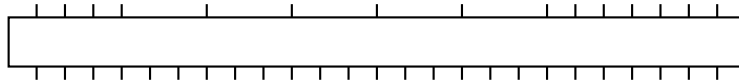
\q{
  \qbox[N={1, ..., 4, 6, 8, ..., 20}, S={1, ..., 20}, hlen=10]
}

```



例 3.20

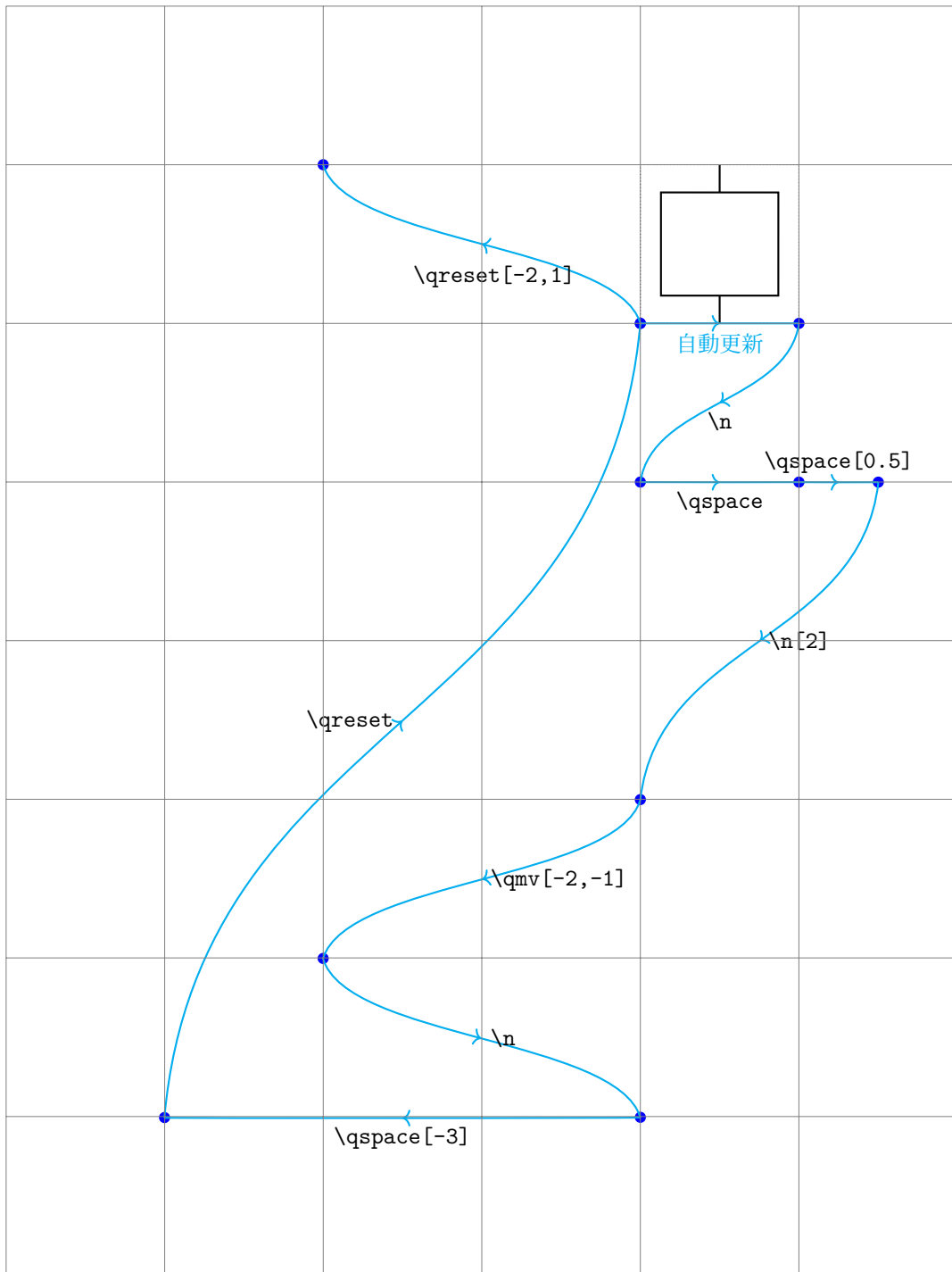
```
\qf{
  \qbox[N={1,...,4,7,10,...,19,20,21,...,25}, S={1,...,25}, hlen=10]
}
```



3.7 相対座標

素子の位置座標を相対的に指定するコマンドである。なお、 x , y は整数である必要はなく、 $2^{1.5}$ や $\cos(\pi)$, $\sqrt{2}$ などの`\fpeval` の評価可能式であればよい。

- `\qmv[x,y]`
 - (x, y) だけ並行移動する。
 - デフォルトで $x = y = 0$ 。
- `\n[y]`
 - y だけ垂直降下し ($Y \mapsto Y - y$), X 座標を 0 にする。
 - デフォルトで $y = 1$ であり、改行のような挙動をみせる。
- `\qspace[x]`
 - x だけ水平移動する。
 - デフォルトで $x = 1$ であり、スペースキーのような挙動をみせる。
 - `\qmv[x,0]` と同義である。
- `\qreset[x,y]`
 - 点 (x,y) に移動する。

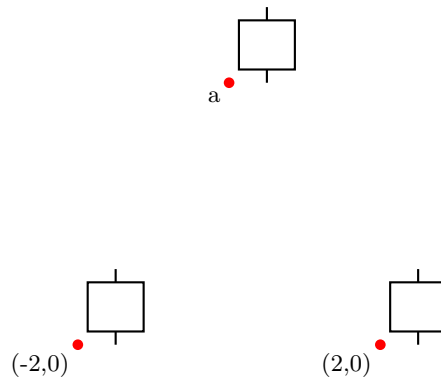


3.8 絶対座標

at キーを用いれば、絶対座標で位置を指定できる。 $\backslash\text{q}\{\backslash\text{qbox}[\text{at}=\{2,3\}]\}$ は $\backslash\text{q}\{\backslash\text{qreset}[2,3]\backslash\text{qbox}\}$ と同義である。

例 3.21 絶対座標

```
\qf{
  \coordinate (a) at (0,{\fpeval{2*sqrt(3)}});
  \qbox[at=a]
  \qbox[at={-2,0}]
  \qbox[at={2,0}]
  \fill[red] (a) circle (2pt);
  \fill[red] (-2,0) circle (2pt);
  \fill[red] (2,0) circle (2pt);
  \node[below left] at (a) {a};
  \node[below left] at (-2,0) {(-2,0)};
  \node[below left] at (2,0) {(2,0)};
}
```



TeX 言語はチューリング完全である*¹。すなわち、この世に存在するあらゆるアルゴリズムは TeX で記述可能である。物理シミュレーション (天気予報や化学反応予測)、経済シミュレーション (投資戦略)、さらには人工知能の学習アルゴリズム (画像認識や自然言語処理) ——。

どれも TeX で実装できる。

しかし、それを実際にやろうと思う人間は果たしてどれほどいるだろうか？ 筆者はソートアルゴリズムですら TeX で書きたくない。それは表計算ソフトでスーパーマリオを作るようなものだからである。

——ところが、である。

筆者は“天啓”を受けた*²。そして at キーを用いたソートアルゴリズムを作り上げた。

*¹ 例えば、チューリングマシンをシミュレートできることが LiteratePrograms の例で示されている [4]。また、Overleaf の記事では、TeX を用いたフィボナッチ数列の計算方法が紹介されており、そのチューリング完全性の実用性が理解できる [5]。

*² 元ネタ: 2011 年 1 月 20 日、匿名掲示板 4chan において“Sleep Sort”というソートアルゴリズムが公開された [2, 3]。このアルゴリズムは Bash スクリプトを用いて各入力値をスレッドとして非同期に実行し、それぞれのスレッドの終了タイミング (指定された“スリープ”時間) を用いてリストをソートする手法である。

例 3.22

```
\newcommand{\AtSort}[1][1]{
  \q
  {
    \foreach \i in {#1}
    {
      \qbox[name={\i}, at={0, -\i}]\n
    }
  }
}
\AtSort[4,1,3,-1,6,2]
```

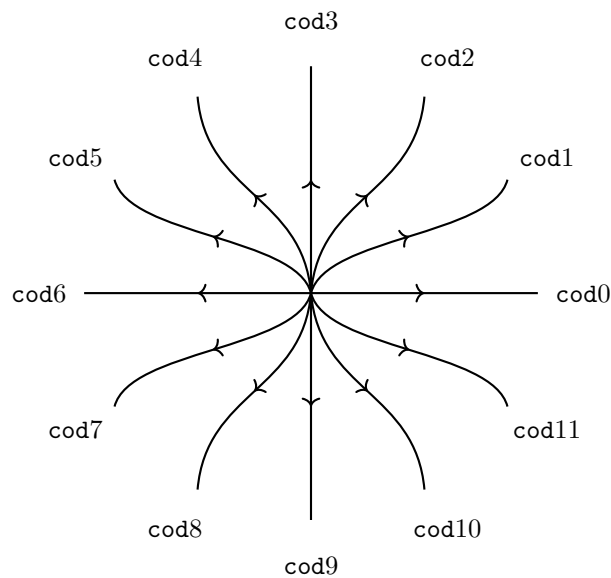


動く. 確かに動く.

だが, 一つ問題がある.

リストの要素に絶対値の大きな値が含まれていると, 出力が紙面からはみ出してしまうのである.

3.9 ワイヤーのカスタマイズ



3.3 節で登場したボックス \square のキーの中で, `id`, `vlen` はワイヤーでも有効である. ワイヤー特有のキーとして, 基本的なものは次の通りである:

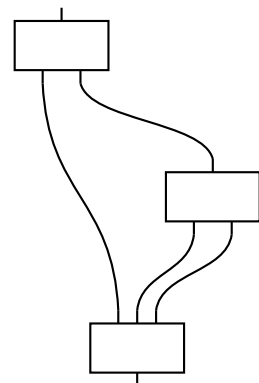
- dom: 入力点.
- cod: 出力点.
 - デフォルト値は dom を 1 だけ北へ垂直移動した位置.
- label: ワイヤーにラベルを付ける.
- label at: ラベルのワイヤー上の位置.
 - デフォルトで midway.
- label side: ラベルとワイヤーの位置関係.
 - デフォルトで right.

例 3.23

```

\q{
  \qbox[n=3,hlen=1.5]
  \qbox[at={1,2}, s=2, hlen=1.5]
  \qbox[at={-1,4}, s=2, hlen=1.5]
  \qwiredom={N-1-1}, cod={S-1-3}
  \qwiredom={N-2-1}, cod={S-1-2}
  \qwiredom={N-3-1}, cod={S-2-2}
  \qwiredom={N-1-2}, cod={S-2-3}
}

```

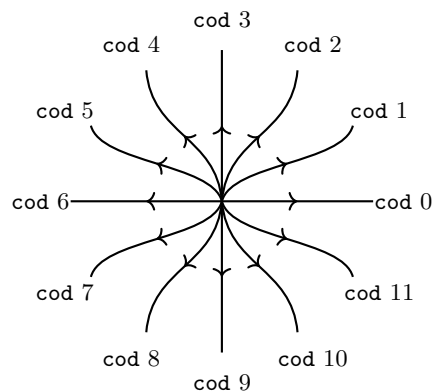


例 3.24

```

\q{
  \def\maxi{11}
  \foreach \i in {0,...,\maxi}
  {
    \qwiredom={0,0}, cod={{\fpeval{\i*360/(\maxi+1)}}:2}
    \node at ({\fpeval{\i*360/(\maxi+1)}}:2.4) {\texttt{cod} \i};
  }
}

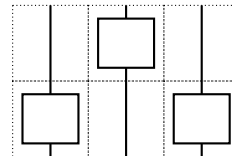
```



ワイヤー \mid のバウンディングボックスは、 \square と同じである:

例 3.25

```
\q
{
  \qwire\qbox\qwire\n
  \qbox\qwire\qbox
  \qball
}
```

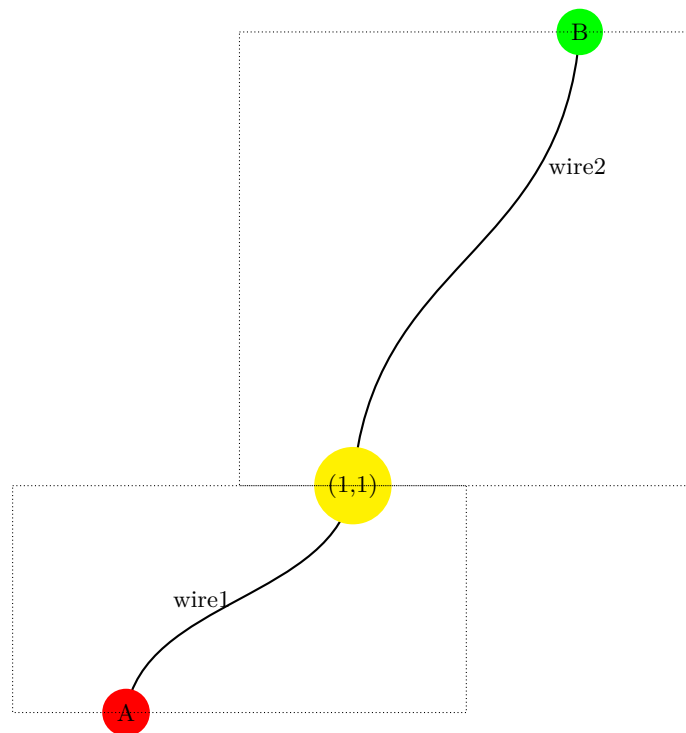


ワイヤーのバウンディングボックスは、dom を入力点、cod を出力点とするようなボックスのそれと一致する:

- \mid と \square
- \nearrow と \square

例 3.26

```
\q[scale=3]{
  \coordinate (A) at (0,0);
  \coordinate (B) at (2,3);
  \qwire[dom=A, cod={1,1}, label={wire1}, label side={left}]
  \qwire[dom={1,1}, cod=B, label={wire2}, label at={near end}]
  \node[fill=red, circle] at (A) {A};
  \node[fill=green, circle] at (B) {B};
  \node[fill=yellow, circle] at (1,1) {(1,1)};
  \qball
}
```

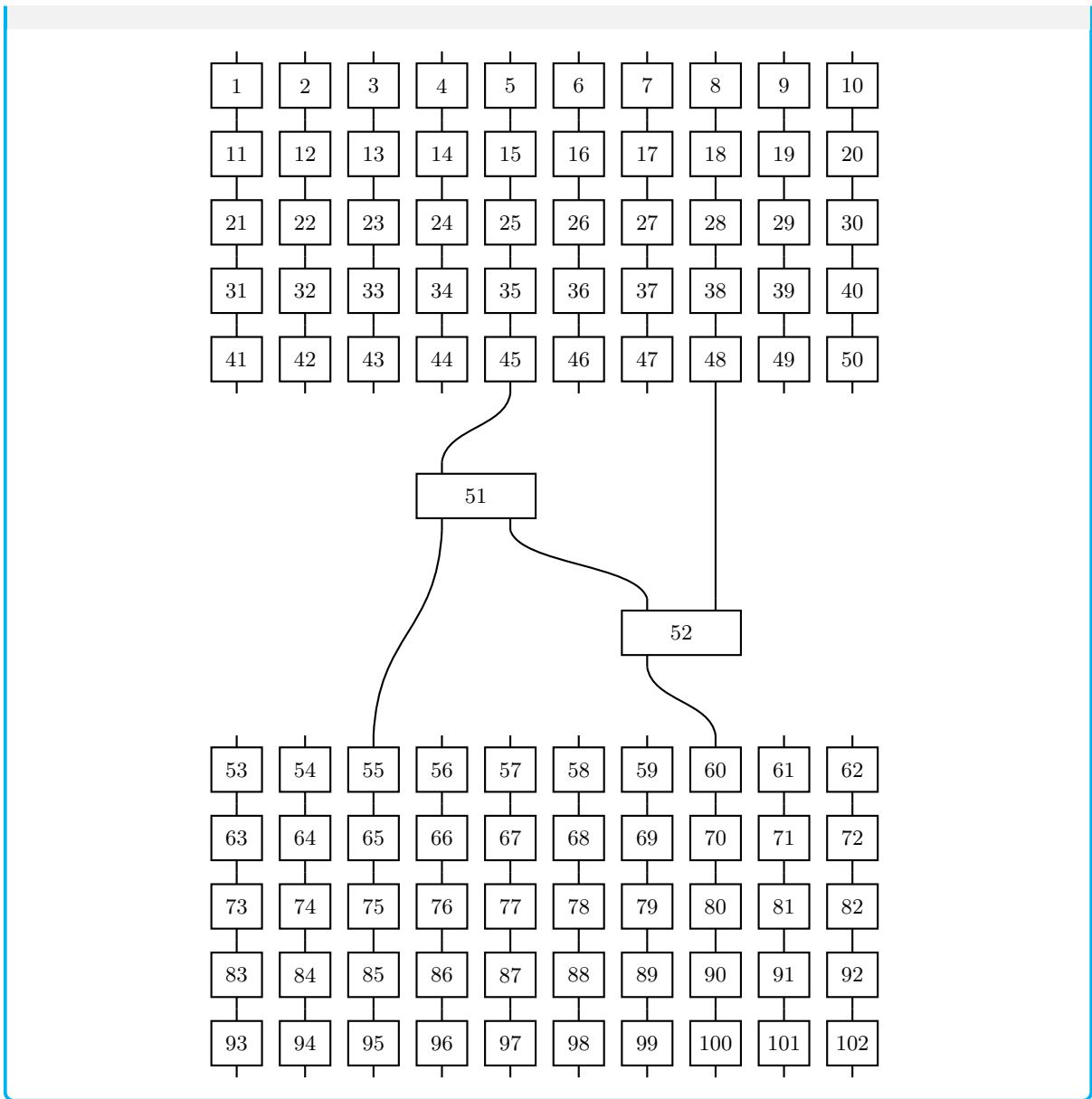


例 3.27

```

\qf
  \qloop[5]{
    \qloop[10]{
      \qbox[show id={true}]
    }\n
  }\n
  \qspace[3]\qbox[s=2,show id={true},id={ego1}]\n\n
  \qspace[6]\qbox[n=2,show id={true},id={ego2}]\n\n
  \qloop[5]{
    \qloop[10]{
      \qbox[show id={true}]
    }\n
  }
  \qwiring[dom={0-1-55},cod={I-1-51}]
  \qwiring[dom={0-1-60},cod={I-1-52}]
  \qwiring[dom={0-1-51},cod={I-1-45}]
  \qwiring[dom={0-1-52},cod={I-2-51}]
  \qwiring[dom={0-2-52},cod={I-1-48}]
}

```



■arrowtype ワイヤーのスタイルは, arrowtype キーを用いて指定する.

例 3.28

```

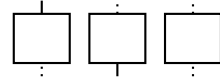
\q{
  \qwire[arrowtype=dotted]
  \qwire[arrowtype=dashed]
  \qwire[arrowtype={dash dot}]
  \qwire[arrowtype={dash dot dot}]
  \qwire[arrowtype={densely dotted}]
  \qwire[arrowtype={loosely dotted}]
}

```



例 3.29

```
\q{
  \qbox[dom arrowtype={dotted}]
  \qbox[cod arrowtype={dotted}]
  \qbox[arrowtype={dotted}]
}
```

**例 3.30**

```
\q{
  \qspider[dom arrowtype={dotted}]
  \qspider[cod arrowtype={dotted}]
  \qspider[arrowtype={dotted}]
}
```

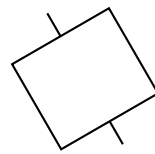
**3.10 キャンバス**

```
\q[オプション]
{
  コマンド
  コマンド
  ...
}
```

キャンバスのオプションで図式全体を変換できる。

例 3.31

```
\q[scale=2,rotate=30]{\qbox}
```



キャンバスを傾けることもできる。

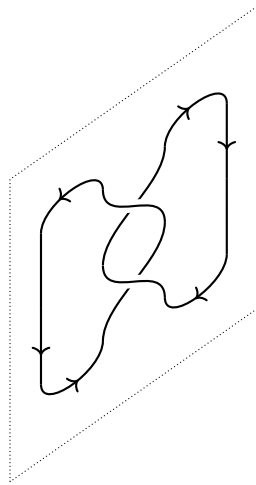
例 3.32

```
\def\anglerot{-55}
\tikzset
{
  my slant style/.style={
    yslant=-cot(\anglerot),
    xscale=sin(-\anglerot)
  }
}
```

```

}
\q[my slant style]
{
  \qcaprev\qcap\n
  \qwire\qbraidinv\qwiredown\n
  \qwiredown\qbraidinv\qwire\n
  \qcup\qcuprev
  \qBBall
}

```



例 3.33

```

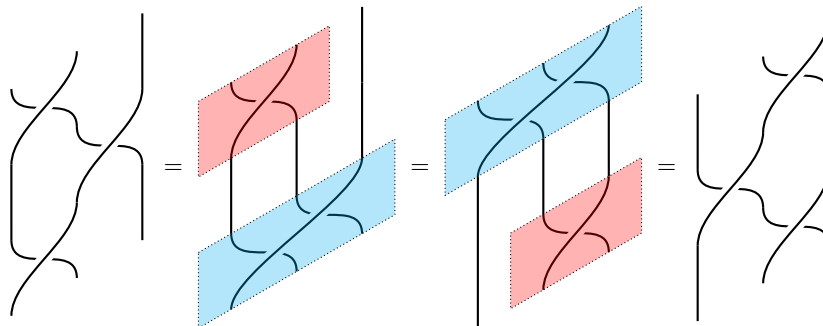
\def\anglerot{-60}
\tikzset
{
  my slant style/.style={
    yslant=-cot(\anglerot),
    xscale=sin(-\anglerot)
  }
}
\[\q[my slant style]
{
  \qbraid\qwire\n
  \qwire\qbraid\n
  \qbraid\qwire
}
=\q[my slant style]
{
  \qbraid\qwire\n
  \qwire\qwire\qwire\n
  \qbraid[num R=2]
  \qbb[red][1]
}

```

```

\qbb[cyan][6]
}
=\q[my slant style]
{
\qbraid[ num R=2]\n
\qwire\qwire\qwire\n
\qwire\qbraid
\qbb[red][6]
\qbb[cyan][1]
}
}
=\q[my slant style]
{
\qwire\qbraid\n
\qbraid\qwire\n
\qwire\qbraid
}\]

```



4 モノイダル圏と QWorld

本章では, QWorld パッケージを用いてモノイダル圏の図式計算をどのように表現できるかを探る. QWorld は, それ単体で機能し, 図式を扱うことができるが, 数式をより柔軟に表現するために, その基盤となるパッケージ (amsmath, amssymb, mathtools) を使用する. 再現の際は, 以下のようにパッケージを適宜ロードせよ:

```

\usepackage{amsmath, amssymb, mathtools}
\usepackage{qworld}

```

4.1 圏

例 4.1 ドメイン

```
\[
\operatorname{dom}\left(
\qbox[
name={\f}
\symbolI{\x}
\symbolO{\y}
]
\right)=x
\]
```

$$\operatorname{dom} \left(\begin{array}{c} y \\ \boxed{f} \\ x \end{array} \right) = x$$

例 4.2 コドメイン

```
\[
\operatorname{cod}\left(
\qbox[
name={\f}
\symbolI{\x}
\symbolO{\y}
]
\right)=\q{\qwiring[label={\y}}
\]
```

$$\operatorname{cod} \left(\begin{array}{c} y \\ \boxed{f} \\ x \end{array} \right) = \left| y \right.$$

例 4.3 合成 (垂直合成)

```
\[
\q{
\qbox[
name={\f}
]
\qcirc
\qbox[
name={\g}
]
}=\q{\qbox[
name={\f\circ g}
]}
\]
```

$$\begin{array}{c} \boxed{f} \\ | \\ \boxed{g} \\ | \end{array} = \boxed{f \circ g}$$

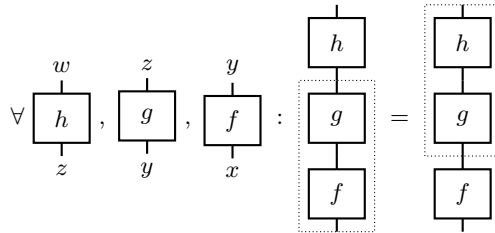
例 4.4 結合律

```
\[
\forall \{
\qbox[
name={\h}
] \symbolI{\z} \symbolO{\w},
\qbox[
name={\g}
] \symbolI{\y} \symbolO{\z},
\qbox[
name={\f}
] \symbolI{\x} \symbolO{\y} :
\q{
\qbox[
name={\h}
] \qcirc
\qbox[
name={\g}
] \qcirc
\qbox[
name={\f}
]
}
\qbb[2,3]
}
=
\]
```

```

\qf
  \qbox[name={\h\}]\qcirc\qbox[name={\g\}]\qcirc\qbox[name={\f\}]
  \qbb[1,2]
}
\]

```

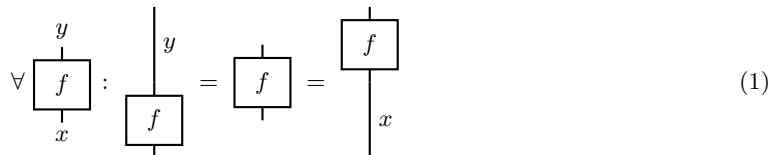


例 4.5 恒等律

```

\begin{equation}
  \label{law:identity}
  \forall\q
  {
    \qbox[name={\f\}]
    \symbolS{\x\}
    \symbolN{\y\}
  }\colon
  \qf
    \qwiring[label={\y\}]\n
    \qbox[name={\f\}]
  }=\qf
    \qbox[name={\f\}]
  }=\qf
    \qbox[name={\f\}]\n
    \qwiring[label={\x\}]
  }
\end{equation}

```



4.1.1 対象情報と色

圏の図式計算において、恒等射は通常、単なるワイヤーとして描かれる。こうしたワイヤーがどの対象の恒等射であるかを、対象ごとに固有の色を割り当てることによって視認可能にする手法が存在する。この手法を用

いることにより、ワイヤ上に対象の情報をエンコードすることが可能となり、曲線構造からなる図式において、対象の区別を直感的に把握する助けとなる。この手法の理論的背景には、**任意の射に対してドメインとなる対象とコドメインとなる対象がそれぞれ一意的存在する**という事実がある。この構造が前提として存在する以上、図式表現において“色”という視覚的属性を通じて対象を暗示/表現することは十分に正当化される操作である。例えば組紐 (52 ページの 4.5.4 項) や双対性 (71 ページ 4.7.3 項) を含む図式において、色による補助が正確な解釈を支援する。この考え方のもとでは、対象とはワイヤーを彩る色のような存在であり、

例 4.6

```

\(\operatorname{dom}\)は射
\(\q{qbox[name={\f}}, dom color=red, cod color=cyan]\)
のドメインの色\(\q{qwire[color=red]}\)
を識別するための関数であり、
\(\operatorname{cod}\)は同様に、コドメインの色
\(\q{qwire[color=cyan]}\)を識別するための関数である.\par
そして紙面上で
\(\q{qbox[name={\f}}, dom color=purple, cod color=teal]\)
のコドメインの色と
\(\q{qbox[name={\g}}, dom color=teal, cod color=orange]\)
のドメインの色が一致していることが色によって明示され、
この条件が満たされているときに限り、合成（垂直合成）
\[
\q{
\qbox[name={\g}}, dom color=cyan, cod color=orange]\n
\qbox[name={\f}}, dom color=red, cod color=cyan]
}
\]
が整合性を保つ操作として許容される。

```

dom は射 f のドメインの色 $|$ を識別するための関数であり、cod は同様に、コドメインの色 $|$ を識別するための関数である。

そして紙面上で f のコドメインの色と g のドメインの色が一致していることが色によって明示され、この条件が満たされているときに限り、合成（垂直合成）



が整合性を保つ操作として許容される。

4.2 モノイダル圏

例 4.7 テンソル積 (並列合成)

```

\l
\q
{
  \qbox[name={\f}] \qbox[name={\g}]
  \symbol0{\(Y_1\)}[id=1] \symbol0{\(Y_2\)}
  \symbolI{\(X_1\)}[id=1] \symbolI{\(X_2\)}
}
=\q
{
  \qbox[name={\f\otimes g}, p=2]
  \symbol0{\(Y_1\)} \symbol0[2]{\(Y_2\)}
  \symbolI{\(X_1\)} \symbolI[2]{\(X_2\)}
}
=\q
{
  \qbox[name={\f\otimes g}]
  \symbol0{\(Y_1\otimes Y_2\)}
  \symbolI{\(X_1\otimes X_2\)}
}
\l

```

$$\begin{array}{c} Y_1 \\ \downarrow \\ \boxed{f} \\ \downarrow \\ X_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} Y_2 \\ \downarrow \\ \boxed{g} \\ \downarrow \\ X_2 \end{array} = \begin{array}{c} Y_1 \quad Y_2 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \boxed{f \otimes g} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ X_1 \quad X_2 \end{array} = \begin{array}{c} Y_1 \otimes Y_2 \\ \downarrow \\ \boxed{f \otimes g} \\ \downarrow \\ X_1 \otimes X_2 \end{array}$$

4.2.1 交換則

例 4.8 交換則 (\otimes の共変関手性)

```

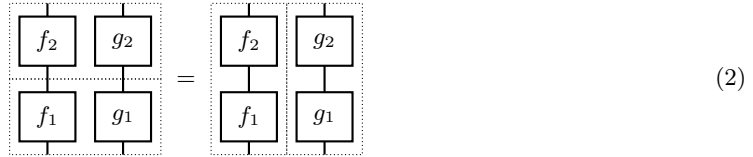
\begin{equation}
\label{law:interchange}
\l
{
  \qbox[name={\f_2}] \qbox[name={\g_2}] \n
  \qbox[name={\f_1}] \qbox[name={\g_1}]
  \qbb[1,2]
  \qbb[3,4]
}
=\l
{

```

```

\qbox[name={\f_2\}]\qbox[name={\g_2\}]\n
\qbox[name={\f_1\}]\qbox[name={\g_1\}]
\qbb[2,4]
\qbb[1,3]
}
\end{equation}

```

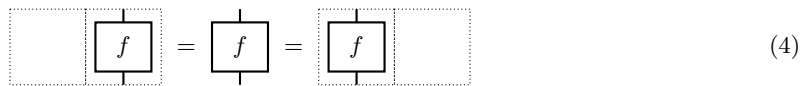
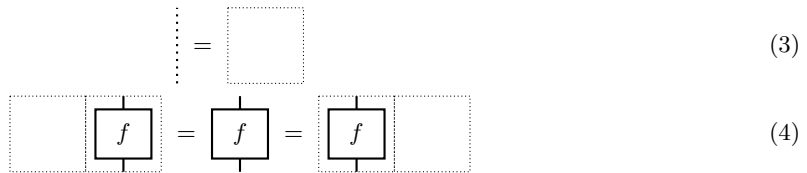


例 4.9 单位对象

```

\begin{gather}
\q{ \qwiring[arrowtype=dotted]}
=\q{ \qunitob \qbball }\\
\q{ \qunitob \qbox[name={\f\}] \qbball }
=\q{ \qbox[name={\f\}] }
=\q{ \qbox[name={\f\}] \qunitob \qbball }\label{cond:unitob}
\end{gather}

```

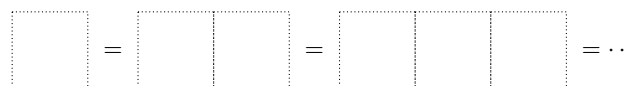


例 4.10








```

\[
\q{\qunitob\qbball}
=\q{\qloop[2]{\qunitob}\qbball}
=\q{\qloop[3]{\qunitob}\qbball}
=\cdots
\]

```



4.3 特殊ボックス

- `\qstate`:  (0 入力).
- `\qeffect`:  (0 出力).
- `\qscalar`:  (0 入力, 0 出力).
- `\qasym`:  (非対称ボックス).
- `\qtrans`:  (転置ボックス). [54 ページの 4.6.1 項](#).
- `\qadj`:  (随伴ボックス). [72 ページの 4.8.1 項](#).
- `\qconj`:  (共役ボックス). [73 ページの 4.8.2 項](#).

4.3.1 ゼロ入力

例 4.11

`\q{\qstate}`



4.3.2 ゼロ出力

例 4.12

`\q{\qeffect}`

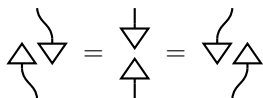


4.3.3 ゼロ入力ゼロ出力

例 4.13

`\q{\qscalar}`



■ 

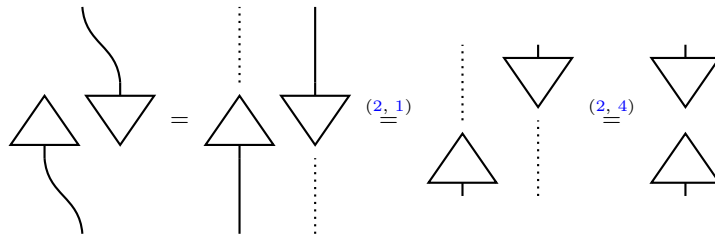
例 4.14

```
\[
  \q{
    \qeffect\qstate
    \qwire[dom={0-1-2}, cod={1,2}]
    \qwire[dom={1,-1}, cod={I-1-1}]
  }=\q{
    \qwire[arrowtype=dotted]\qwire\n
```

```

\qeffect\qstate\n
\qwire\qwire[arrowtype=dotted]
}\stackrel{\text{(\ref{law:interchange}, \ref{law:identity})}}{=}q{
\qwire[arrowtype=dotted]\qstate\n
\qeffect\qwire[arrowtype=dotted]
}\stackrel{\text{(\ref{law:interchange}, \ref{cond:unitob})}}{=}q{\qstate\n\qeffect}
\}

```



例 4.15 表現行列

```

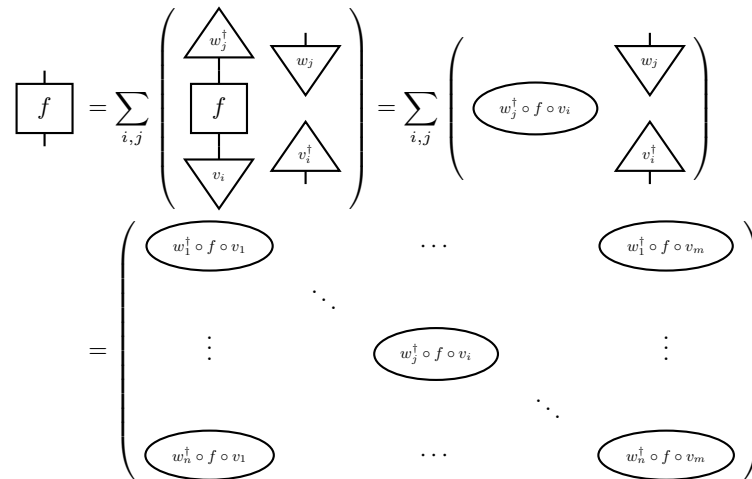
\begin{align*}
&\q{\qbox[name={\f\}]} \\
&\&=\sum\limits_{i,j} \\
&\left( \\
&\q{ \\
&\qeffect[name={\w_j^{\dagger}}]\n \\
&\qbox[name={\f\}]\n \\
&\qstate[name={\v_i}]\n \\
&}\q{ \\
&\qstate[name={\w_j}]\n \\
&\qeffect[name={\v_i^{\dagger}}] \\
&} \\
&\right) \\
&=\sum\limits_{i,j}\left( \\
&\q{ \\
&\qscalar[name={\w_j^{\dagger}\circ f\circ v_i}] \\
&} \\
&\q{ \\
&\qstate[name={\w_j}]\n \\
&\qeffect[name={\v_i^{\dagger}}] \\
&} \\
&\right)\ \\
&\&=\begin{pmatrix} \\
&\q{\qscalar[name={\w_1^{\dagger}\circ f\circ v_1}]} \\
&\q{\qscalar[name={\w_1^{\dagger}\circ f\circ v_m}]} \\
&\&\&\cdots&\&\q{\qscalar[name={\w_1^{\dagger}\circ f\circ v_m}]} \\
&\&\&\cdots&\&\ \\
&\vdots&\&\q{\qscalar[name={\w_j^{\dagger}\circ f\circ v_i}]}&\&\vdots \\
&\&\&\cdots&\& \\
\end{pmatrix}

```








```

\q{\qscalar[name={\(\w_n^{\dagger})\circ f\circ
v_1\)}}&&\cdots&&\q{\qscalar[name={\(\w_n^{\dagger})\circ f\circ
v_m\)}}
\end{pmatrix}
\end{align*}

```



4.4 モノイド対象

- `\qmul`: 
 - `hlen=2`: 
- `\qcomul`: 
 - `hlen=2`: 
- `\qunit`: 
- `\qcounit`: 
- `\qspider`: 

例 4.16 結合律

```

\begin{equation}
\label{law:associate}
\q{
\qspace[0.5]\qmul[hlen=2]\n
\qmul[hlen=2]\qspace[-0.5]\qwiring}=\q{
\qmul[hlen=2]\n
\qwiring\qspace[-0.5]\qmul[hlen=2]
}
\end{equation}

```

$$(5)$$

例 4.17 单位律

```

\begin{equation}
\label{law:unit}
\q{
\qmul[hlen=2]\n
\qwire\qunit
}=\q{\qwire[vlen=2]}
=\q{
\qmul[hlen=2]\n
\qunit\qwire
}
\end{equation}

```

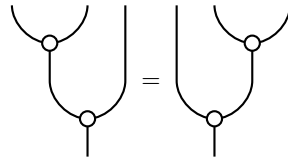
$$(6)$$

例 4.18 余结合律

```

\begin{equation}
\label{law:coassociate}
\q{
\qcomul[hlen=2]\qspace[-0.5]\qwire\n
\qspace[0.5]\qcomul[hlen=2]
}
=\q{
\qwire\qspace[-0.5]\qcomul[hlen=2]\n
\qcomul[hlen=2]
}
\end{equation}

```



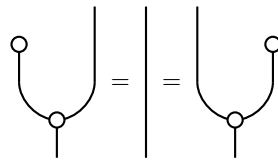
(7)

例 4.19 余単位律

```

\begin{equation}
\label{law:counit}
\q{
\qcounit\qwire\n
\qcomul[hlen=2]
}
=\q{\qwire[vlen=2]}
=\q{
\qwire\qcounit\n
\qcomul[hlen=2]
}
\end{equation}

```



(8)

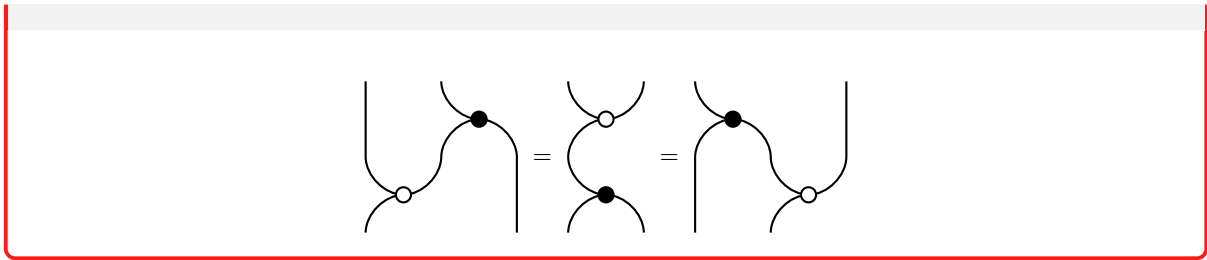
4.4.1 フロベニウス則





失敗例 4.1 フロベニウス則

```

\[
\q{
\qwire\qmul[color=black]\n
\qcomul\qwire
}=\q{
\qcomul\n
\qmul[color=black]
}=\q{
\qmul[color=black]\qwire\n
\qwire\qcomul
}
\]

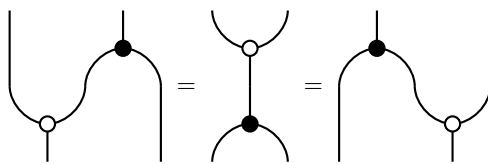
```

失敗例として挙げられているが、実際にはフロベニウス則が正確に記述されている。むしろ、全てのワイヤーの間隔が整数値に保たれているため、垂直合成時の調整が容易であり、場合によっては調整自体が不要となる可能性がある。これは単なる好みの問題に過ぎない。 `\qmul` や `\qcomul` のデフォルトの描画結果が ,  であるのは、`\qbox[s=2]` や `\qbox[n=2]` の描画結果が ,  であることの名残である。このような場合の調整キーとして `hlen` がある:

例 4.20 フロベニウス則

```
\[
  \q{
    \qwire\qmul[hlen=2,color=black]\n
    \qcomul[hlen=2]\qwire
  }=\q{
    \qcomul[hlen=2]\n
    \qmul[hlen=2,color=black]
  }=\q{
    \qmul[hlen=2,color=black]\qwire\n
    \qwire\qcomul[hlen=2]
  }
\]
```



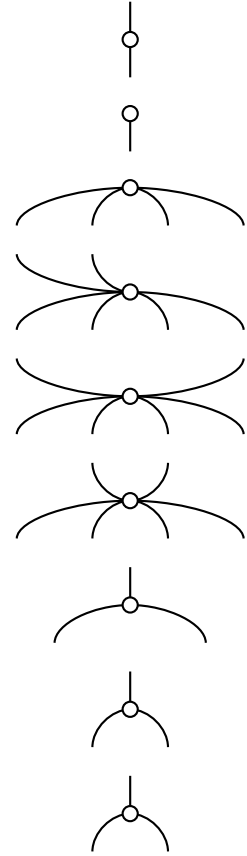
`\qspider` は、ノードがボックスではなく円であることを除けば、`\qbox` と同じである。

例 4.21

```

\[\q{qspider}\]
\[\q{qspider[n=0]}\]
\[\q{qspider[n=0,s=4]}\]
\[\q{qspider[n=2,s=4]}\]
\[\q{qspider[N={1,4},s=4]}\]
\[\q{qspider[N={2,3},s=4]}\]
\[\q{qspider[p=3,N={2},S={1,3}]}\]
\[\q{qspider[p=3,N={2},S={1,3},hlen=2]}\]
\[\q{qspider[n=1,s=2,hlen=2]}\]

```

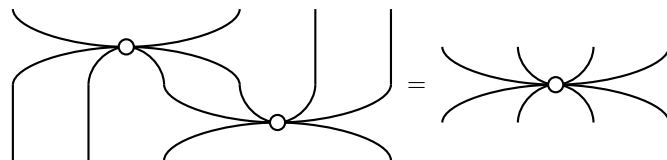


例 4.22


```

\[\q{
  \q{qspider[n=2, s=4, hlen=4]\qwiring\qwiring\n
  \qwiring\qwiring\qspider[n=4, s=2, hlen=4]
}
=\q{qspider[p=4]}\]

```



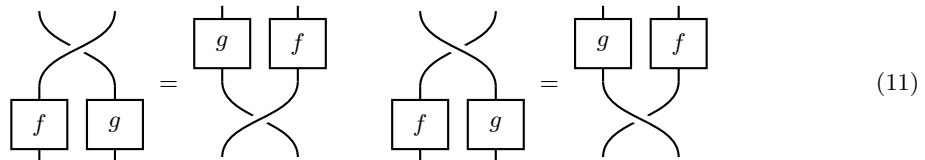
4.5 組紐



- \qbraid: 


```

}
\qqad
\q
{
  \qbraidinv\n
  \qbox[name={\f\}]\qbox[name={\g\}]
}
=
\q
{
  \qbox[name={\g\}]\qbox[name={\f\}]\n
  \qbraidinv
}
\end{equation}

```



コマンド `\qbraid`, `\qbraidinv`, `\qsym` に対し, `num R=0` と指定すると,  のように右側のワイヤーが点線となる. `num L=0` と指定すると,  のように左側のワイヤーが点線となる. これは, 単位対象を空図式, すなわち 0 本のワイヤーとして表すことに由来している.

例 4.26

```

\begin{gather}
\q{
  \qwire\qstate\n
  \qwire
}
=\q{
  \qwire\qstate\n
  \qbraid[num L=0]
}\stackrel{\text{\ref{cond:naturality:braid}}}{=}\q{
  \qbraid\n
  \qstate\qwire
}\label{iso:u:state}\q{
  \q{
    \qunitob\qwire\n
    \qeffect\qwire
  }
}
=\q{
  \qbraid[num L=0]\n

```

```

\qeffect\qwire
}\stackrel{\text{(\ref{cond:naturality:braid})}}{=}\q{
\qwire\qeffect\n
\qbraid
}\label{iso:u:effect}
\end{gather}

```

$$\text{Diagrammatic equation (12)} \tag{12}$$

$$\text{Diagrammatic equation (13)} \tag{13}$$

例 4.27

```

\begin{equation}
\label{iso:spatial}
\q{\qscalar\qmv[0,-1]\qwire[vlen=3]}
=\q{\qbraid[num L=0]\n\qscalar\qmv[0,-1]\qwire[vlen=2]}
\stackrel{\text{(\ref{cond:naturality:braid})}}{=}
\q{\qwire[vlen=2]\qscalar\n\qbraid[num L=0]}
=\q{\qscalar\qmv[-2,-1]\qwire[vlen=3]}
\end{equation}

```

$$\text{Diagrammatic equation (14)} \tag{14}$$

例 4.28

```

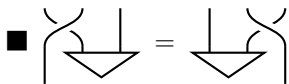
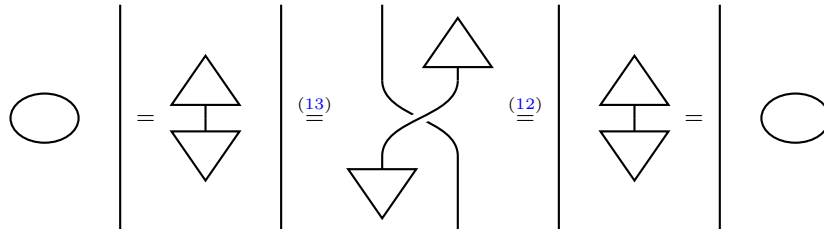
\[
\q{\qscalar\qmv[0,-1]\qwire[vlen=3]}
=\q{\qeffect\n\qstate\qmv[0,-0.5]\qwire[vlen=3]}
\stackrel{\text{(\ref{iso:u:effect})}}{=}
\q{\qwire\qeffect\n\qbraid\n\qstate\qwire}
\stackrel{\text{(\ref{iso:u:state})}}{=}

```

```

\q{\qeffect\n\qstate\qmv[-2,-0.5]\qwire[vlen=3]}
=\q{\qscalar\qmv[-2,-1]\qwire[vlen=3]}
\]

```



例 4.29

```

\begin{align}
\q
{
\qbraid\qwire\n
\qwire\qstate[n=2]
}
&=\q
{
\qbraid\qwire\n
\qwire\qstate[n=2]\n\n
\qbraidinv[num L=0,vlen=2,hlen=2.5]
}
\stackrel{\text{(\ref{cond:naturality:braid})}}{=} \q
{
\qbraid\qwire\n\n
\qbraidinv[num L=2,vlen=2]\n
\qstate[n=2]\qwire\n
\qspace[0.5]\qwire[arrowtype={densely dotted}]\qspace[0.5]\qwire
} \\
&=\q
{
\qbraid\qwire\n\n
\qbraidinv[num L=2,vlen=2]\n
\qstate[n=2]\qwire\n
\qspace[2]\qwire
\qbb[green][3]
} \stackrel{\text{(\ref{eq:hexagon})}}{=} \q
{

```

```

\qbraid\qwire\n
\qbraidinv\qwire\n
\qwire\qbraidinv\n
\qstate[n=2]\qwire\n
\qspace[2]\qwire
\qbb[green][3,...,6]
}\
&=\q
{
\qbraid\qwire\n
\qbraidinv\qwire\n
\qwire\qbraidinv\n
\qstate[n=2]\qwire\n
\qspace[2]\qwire
\qbb[orange][1,3]
}
\stackrel{\text{(\ref{eq:inverse:braid})}}{=}\q
{
\qloop[2]{\qloop[3]{\qwire}\n}
\qwire\qbraidinv\n
\qstate[n=2]\qwire\n
\qspace[2]\qwire
\qbb[orange][1,2,4,5]
}
\end{align}

```


(15)

(16)

(17)

例 4.30 ヤン-バクスター方程式

```

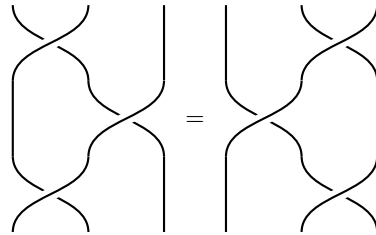
\l
\q
{
  \qbraid\qwire\n
  \qwire\qbraid\n
  \qbraid\qwire
}=\q
{

```

```

\qwire\qbraid\n
\qbraid\qwire\n
\qwire\qbraid
}
\]

```

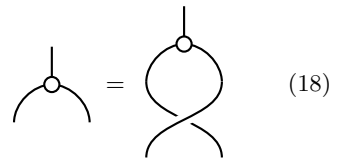


例 4.31 可換性

```

\begin{equation}
\label{cond:cmt}
\q{\qmul[hlen=2]}=\q{\qmul[hlen=2]\n\qbraid}
\end{equation}

```

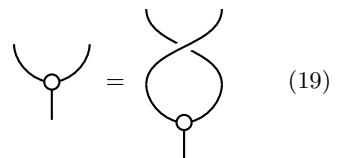


例 4.32 余可換性

```

\begin{equation}
\label{cond:ccmt}
\q{\qcomul[hlen=2]}=\q{\qbraid\n\qcomul[hlen=2]}
\end{equation}

```



4.5.1 双代数

例 4.33 双代数則

```

\begin{gather}
\q{\qcomul[hlen=2]\qcirc\qmul[hlen=2, color=black]}
=\q{
\qmul[hlen=2, color=black]\qmul[hlen=2, color=black]\n
\qwire\qbraid\qwire\n\qcomul[hlen=2]\qcomul[hlen=2]
}\
\q{\qspace[0.5]\qcounit\qcirc\qmul[hlen=2, color=black]}
=\q{\qcounit\qcounit}\
\q{\qcomul[hlen=2]\qcirc\qspace[0.5]\qunit[color=black]}
=\q{\qunit[color=black]\qunit[color=black]}\

```

```

\q{\qcounit\n\qunit[color=black]}
=\q{\\qunitob}
\end{gather}

```

(20)

(21)

(22)

(23)

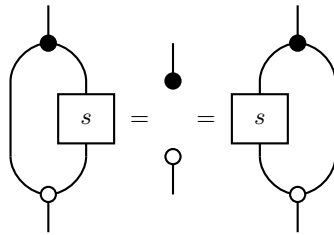
4.5.2 ホップ代数

例 4.34 対合射とホップ則

```

\begin{equation}
\q{
\qmul[hlen=2, color=black]\n
\qwire\qbox[name={\s\}]\n
\qcomul[hlen=2]
}
=\q{\qunit[color=black]\qcirc\qcounit}
=\q{
\qmul[hlen=2, color=black]\n
\qbox[name={\s\}]\qwire\n
\qcomul[hlen=2]
}
\end{equation}

```



(24)

4.5.3 平衡圏

例 4.35 ツイスト

```

\begin{gather}
\q{
  \qbox[name={\(\theta_{X \otimes Y})}, p=2]
  \symbolI{\(X)}\symbolI[2]{\(Y)}
  \symbolI0{\(X)}\symbolI0[2]{\(Y)}
}
=\q{
  \qbox[name={\(\theta_X)}]\qbox[name={\(\theta_Y)}]\n
  \qbraid\n\qbraid
}\label{cond:twist}
\q{\qbox[name={\(\theta_I)}]}=\q{\qunitob}\label{cond:i:twist}
\forall \q{\qbox[name={\(f)}]}\colon
\q{
  \qbox[name={\(\theta_{\operatorname{cod}(f)})}, hlen=1.5]\n
  \qbox[name={\(f)}, hlen=1.5]
}=\q{
  \qbox[name={\(f)}, hlen=1.5]\n
  \qbox[name={\(\theta_{\operatorname{dom}(f)})}, hlen=1.5]
}\label{cond:naturality:twist}
\end{gather}

```

$$\begin{array}{c} X & Y \\ \hline \theta_{X \otimes Y} \\ \hline X & Y \end{array} = \begin{array}{c} \theta_X \quad \theta_Y \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \quad (25)$$

$$\theta_I = \quad (26)$$

$$\forall f : \begin{array}{c} \theta_{\text{cod}(f)} \\ \hline f \\ \hline \theta_{\text{dom}(f)} \end{array} = \begin{array}{c} f \\ \hline \theta_{\text{dom}(f)} \end{array} \quad (27)$$

4.5.4 色

例 4.36 对称

```

\begin{equation}
\label{cond:symmetry}
\q
{
\qbraid[L color=cyan, R color=red]\n
\qbraid[L color=red, R color=cyan]
}
=\q{\qwiring[color=red, vlen=2]\qwiring[color=cyan,
vlen=2]}
\end{equation}

```

$$\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \quad (28)$$

例 4.37

```

\[\q{\qbraid[L color=red, R color=cyan]}
=\left(\q{\qbraid[L color=cyan, R color=red]}\right)^{-1}
=\q{\qbraidinv[L color=red, R color=cyan]}

```





$$\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} = \left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right)^{-1} = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$$

例 4.38 シンメトリー

`\q{\qsym}`



4.6 双対性

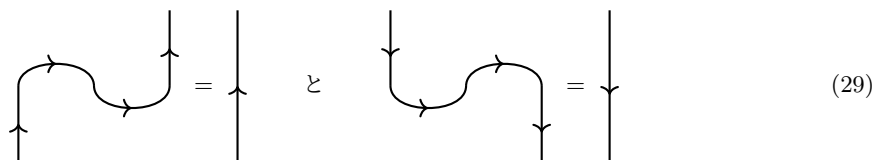
- `\qcap:` 
- `\qcup:` 
- `\qcaprev:` 
- `\qcuprev:` 

例 4.39 ジグザグ等式

```

\begin{equation}
\label{eq:snake}
\q{
\qcap\qwiringup\n
\qwiringup\qcup
}
=\q{
\qwiringup[vlen=2]
}
\quad\text{と}\quad
\q{
\qwiringdown\qcap\n
\qcup\qwiringdown
}
=\q{
\qwiringdown[vlen=2]
}
\end{equation}

```



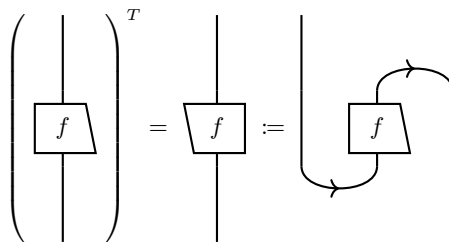
4.6.1 転置ボックス

例 4.40 転置

```

\left(\q{\qwire\n\qasym[name={\f\}]\n\qwire}\right)^T
=\q{
\qwire\n
\qtrans[name={\f\}]\n
\qwire
}\coloneq\q{
\qwire\qcap\n
\qwire\qasym[name={\f\}]\qwire\n
\qcup\qwire
}
\]

```



例 4.41

```

\begin{equation}
\label{eq:wirerev}
\left(\q{\qwireup}\right)^T=\q{\qwiredown}
\end{equation}

```

$$\left(\begin{array}{c} | \\ | \\ \uparrow \end{array}\right)^T = \begin{array}{c} | \\ \downarrow \end{array} \quad (30)$$

例 4.42 スライディング

```

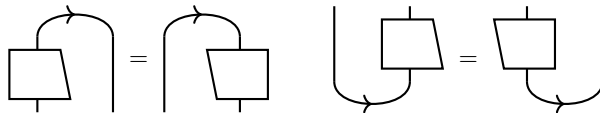
\begin{equation}
\label{eq:sliding}
\q{
\qcap \n
\qasym \qwire
}
=\q{

```

```

\qcap \n
\qwire \qtrans
}
\qqad
\q{
\qwire \qasym \n
\qcup
}
=\q{
\qtrans \qwire \n
\qcup
}
\end{equation}

```



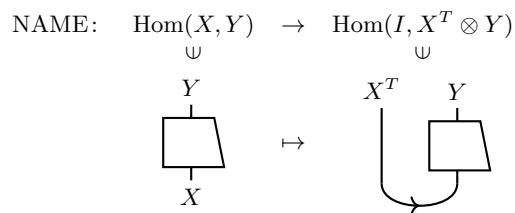
(31)

例 4.43

```

\begin{equation}
\begin{array}{rccc}
\operatorname{NAME} & \colon & \operatorname{Hom}(X, Y) & \\
& & \& \to & \operatorname{Hom}(I, X^T \otimes Y) \\
& & \& \rotatebox{90}{\(\in\)} & \& \rotatebox{90}{\(\in\)} \\
& & \& \q{ & \\
& & \& \qasym & \\
& & \& \symbolI{\(X\)} & \\
& & \& \symbolO{\(Y\)} & \\
& & \& \mapsto & \\
& & \& \q{ & \\
& & \& \qwire[label={\(\(X^T\)}], label at={at end}, label side={above}] \qasym \n & \\
& & \& \qcup & \\
& & \& \symbolO{\(Y\)}[id=2] & \\
& & \& \} & \\
& & \& \end{array} & \\
\end{equation}

```



(32)

例 4.44

```

\begin{equation}
\begin{array}{rccc}
\operatorname{CONAME} & \colon & \operatorname{Hom}(X, Y) \\
& \to & \operatorname{Hom}(X \otimes Y^T, I) \\
& \boxtimes & \boxtimes \\
& \{ \\
& \quad \operatorname{qasym} \\
& \quad \operatorname{symbolI}\{X\} \\
& \quad \operatorname{symbolO}\{Y\} \\
& \} & \operatorname{mapsto} \\
& \{ \\
& \quad \operatorname{qcap} \operatorname{n} \\
& \quad \operatorname{qasym} \operatorname{qwire}[label=\{Y^T\}, label at=\{at start\}, label side=\{below\}] \\
& \quad \operatorname{symbolI}\{X\}[id=2] \\
& \} \\
\end{array} \\
\end{equation}

```

$$\begin{array}{ccc}
 \text{CONAME:} & \operatorname{Hom}(X, Y) & \rightarrow & \operatorname{Hom}(X \otimes Y^T, I) \\
 & \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\
 & \begin{array}{c} Y \\ \hline \square \\ \hline X \end{array} & \mapsto & \begin{array}{c} \psi \\ \curvearrowright \\ \square \\ \hline X \end{array} \quad Y^T
 \end{array} \tag{33}$$

4.6.2 コピー禁止定理

例 4.45 一様コピー

```

\begin{gather}
\{ \\
\quad \operatorname{qwire} \operatorname{qbraid} \operatorname{qwire} \operatorname{n} \\
\quad \operatorname{qcomul}[hlen=2, name=\{\text{copy}_X\}] \operatorname{qcomul}[hlen=2, name=\{\text{copy}_Y\}] \\
\quad \operatorname{symbolI}\{X\}[id=4] \operatorname{symbolI}\{Y\}[id=5] \\
\quad \operatorname{symbolO}\{X\}[id=1] \operatorname{symbolO}\{Y\}[id=2] \\
\quad \operatorname{symbolO}[2]\{X\}[id=2] \operatorname{symbolO}\{Y\}[id=3] \\
\} = \{ \\
\quad \operatorname{qcomul}[hlen=3, vlen=2, name=\{\text{copy}_{X \otimes Y}\}] \operatorname{symbolI}\{X \otimes Y\} \\
\quad \operatorname{symbolO}\{X \otimes Y\} \operatorname{symbolO}[2]\{X \otimes Y\} \\
\} \operatorname{label}\{cond:copy\} \\
\operatorname{forall} \{ \operatorname{qbox}[name=\{f\}] \operatorname{symbolI}\{X\} \operatorname{symbolO}\{Y\} \} \colon \\
\{ \\
\quad \operatorname{qbox}[name=\{f\}] \operatorname{qbox}[name=\{f\}] \operatorname{n}
\}

```

```

\qcomul[hlen=2, name={\(\text{copy}_X\)}]
}= \q{
\qcomul[hlen=2, name={\(\text{copy}_Y\)}] \n
\qspace[0.5] \qbox[name={\(\text{f}\)}]
}\label{cond:morcopy} \
\q{
\qcomul[hlen=2, name={\(\text{copy}_I\)}] \symbolI{\(I\)}
\symbolI0{\(I\)} \symbolI0[2]{\(I\)}
}= \q{\qunitob} \label{cond:i:copy}
\end{gather}

```

$$\text{Diagram (34): } \text{copy}_X \text{ and } \text{copy}_Y \text{ are composed to form } \text{copy}_{X \otimes Y} \quad (34)$$

$$\forall f : \text{copy}_X \text{ and } f \text{ are composed to form } f \text{ and } \text{copy}_X \quad (35)$$

$$\text{Diagram (36): } \text{copy}_I \text{ and } I \text{ are composed to form } I \quad (36)$$

例 4.46 コピー可能状態

```

\l
\q{
\qcomul[hlen=2, name={\(\operatorname{copy}\)}] \n
\qspace[0.5] \qstate[name={\(\text{a}\)}]
}= \q{
\qstate[name={\(\text{a}\)}] \qstate[name={\(\text{a}\)}]
}
\l

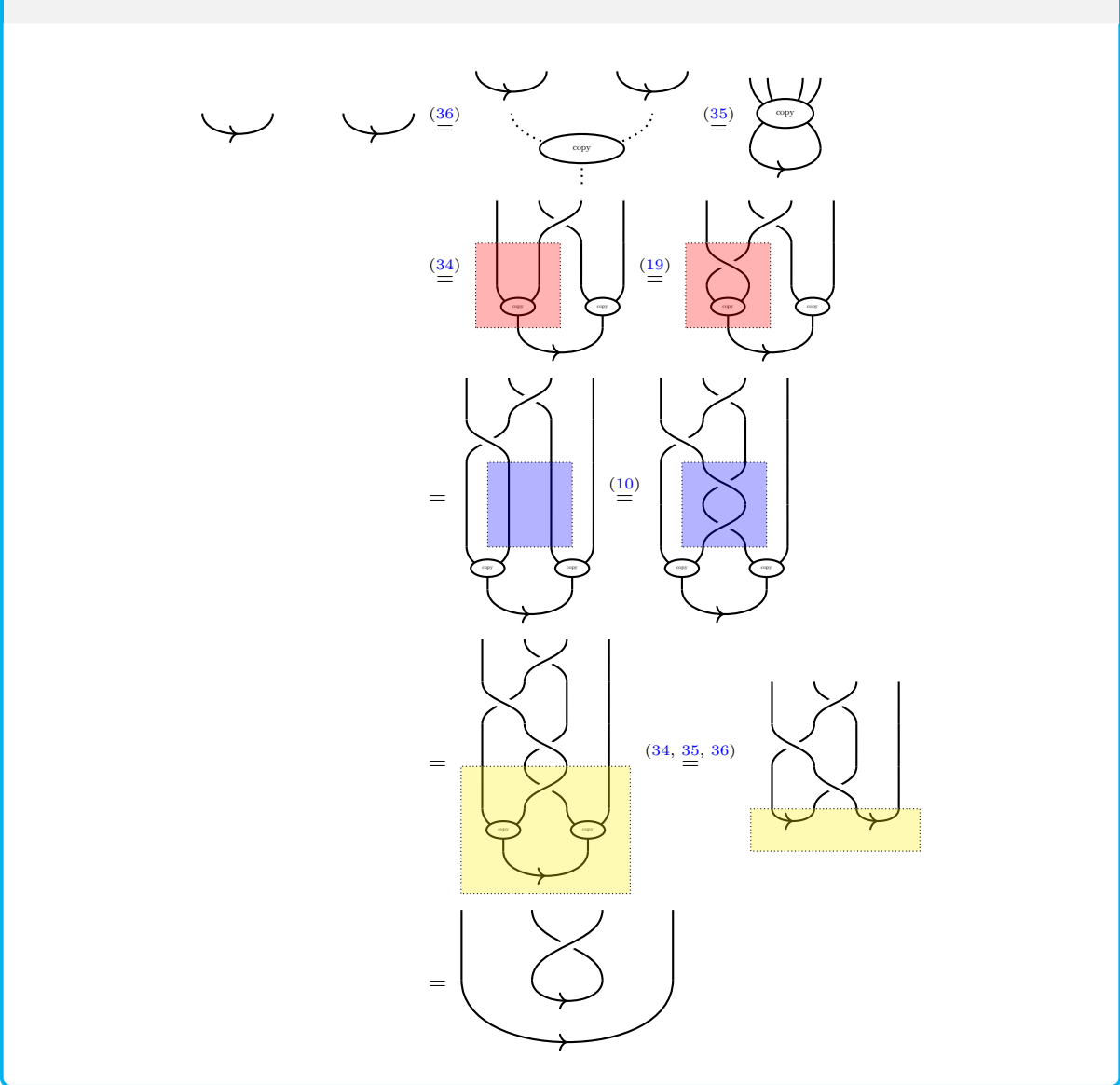
```

$$\text{Diagram: } \text{copy} \text{ and } a \text{ are composed to form } a \text{ and } a$$


```

&=\q[ $\text{scale}=0.6$ ]{
  \qwire\qbraid\qwire\n
  \qbraidinv\qwire\qwire\n
  \qwire\qbraidinv\qwire\n
  \qwire\qbraid\qwire\n
  \qloop[2]{\qcomul[hlen=2, name={\(\operatorname{copy}\)}]}\n
  \qspace[0.5]\qcup[hlen=3]
  \qbb[yellow][10,14,15]
}\stackrel{\text{\(\ref{cond:copy}, \ref{cond:morcopy}, \ref{cond:i:copy})}}{=}
\q[ $\text{scale}=0.6$ ]{
  \qwire\qbraid\qwire\n
  \qbraidinv\qwire\qwire\n
  \qwire\qbraidinv\qwire\n
  \qcup\qcup
  \qbb[yellow][10,11]
}\n
&=\q{
  \qwire\qbraid\qwire\n
  \qcup[n=4]
}
\end{align*}

```



例 4.48

```

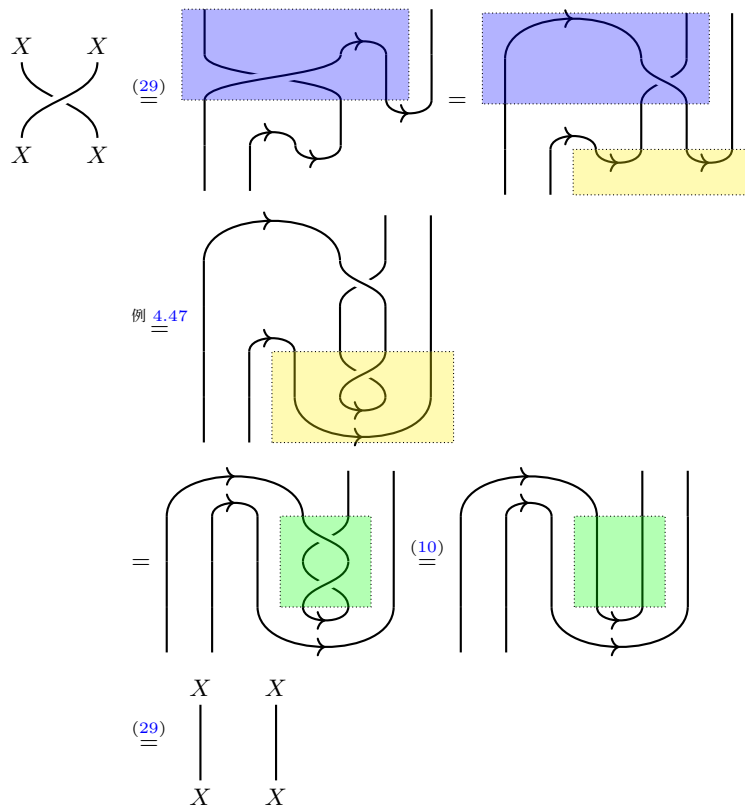
\begin{align*}
& \backslash q{
  \backslash qbraid
  \backslash symbolI{\backslash(X\)}\backslash symbol10{\backslash(X\)}
  \backslash symbolII[2]{\backslash(X\)}\backslash symbol10[2]{\backslash(X\)}
  }& \backslash stackrel{\text{\(\ref{eq:snake}\)}}{=} \backslash q[\text{scale}=0.6]{
  \backslash qwire\qspace[2]\qcap\qwiring\backslash n
  \backslash qbraid[hlen=4]\qwiring\qwiring\backslash n
  \backslash qwire\qcap\qwiring\qcup\backslash n
  \backslash qwire\qwiring\qcup
  \backslash qbb[blue][1,5]

```

```

}=\\q[\\scale=0.6]{
  \\qcap[hlen=4]\\qwire\\n
  \\qwire\\qspace[2]\\qbraidinv\\n
  \\qwire\\qcap\\qwire\\qwire\\qwire[vlen=3]\\n
  \\qwire\\qwire\\qcup\\qcup
  \\qbb[blue][1,4]
  \\qbb[yellow][12,13]
}\\
&\\stackrel{\\text{例 \\ref{len:copycupcup}}}{=}\\q[\\scale=0.6]{
  \\qcap[hlen=4]\\qwire\\n
  \\qwire\\qspace[2]\\qbraidinv\\n
  \\qwire\\qcap\\qwire\\qwire\\qwire[vlen=3]\\n
  \\qwire\\qwire\\qwire\\qbraid\\qwire\\n
  \\qwire\\qwire\\qcup[n=4]
  \\qbb[yellow][12,14,17]
}\\
&=\\q[\\scale=0.6]{
  \\qcap[s=4]\\qwire\\n
  \\qloop[3]{\\qwire}\\qbraidinv\\n
  \\qloop[3]{\\qwire}\\qbraid\\qwire[vlen=3]\\n
  \\qwire\\qwire\\qcup[n=4]
  \\qbb[green][6,10]
}\\stackrel{\\text{(\\ref{eq:inverse:braid})}}{=}\\q[\\scale=0.6]{
  \\qcap[s=4]\\qwire\\qwire\\n[2]
  \\qloop[6]{\\qwire[vlen=2]}\\n
  \\qwire\\qwire\\qcup[n=4]
  \\qbb[green][7,8]
}\\
&\\stackrel{\\text{(\\ref{eq:snake})}}{=}\\q{
  \\qwire\\qwire
  \\symbolI{\\(X\\)}[id=1]\\symbolO{\\(X\\)}[id=1]
  \\symbolI{\\(X\\)}\\symbolO{\\(X\\)}
}
\\end{align*}

```



例 4.49 クローン禁止定理

```

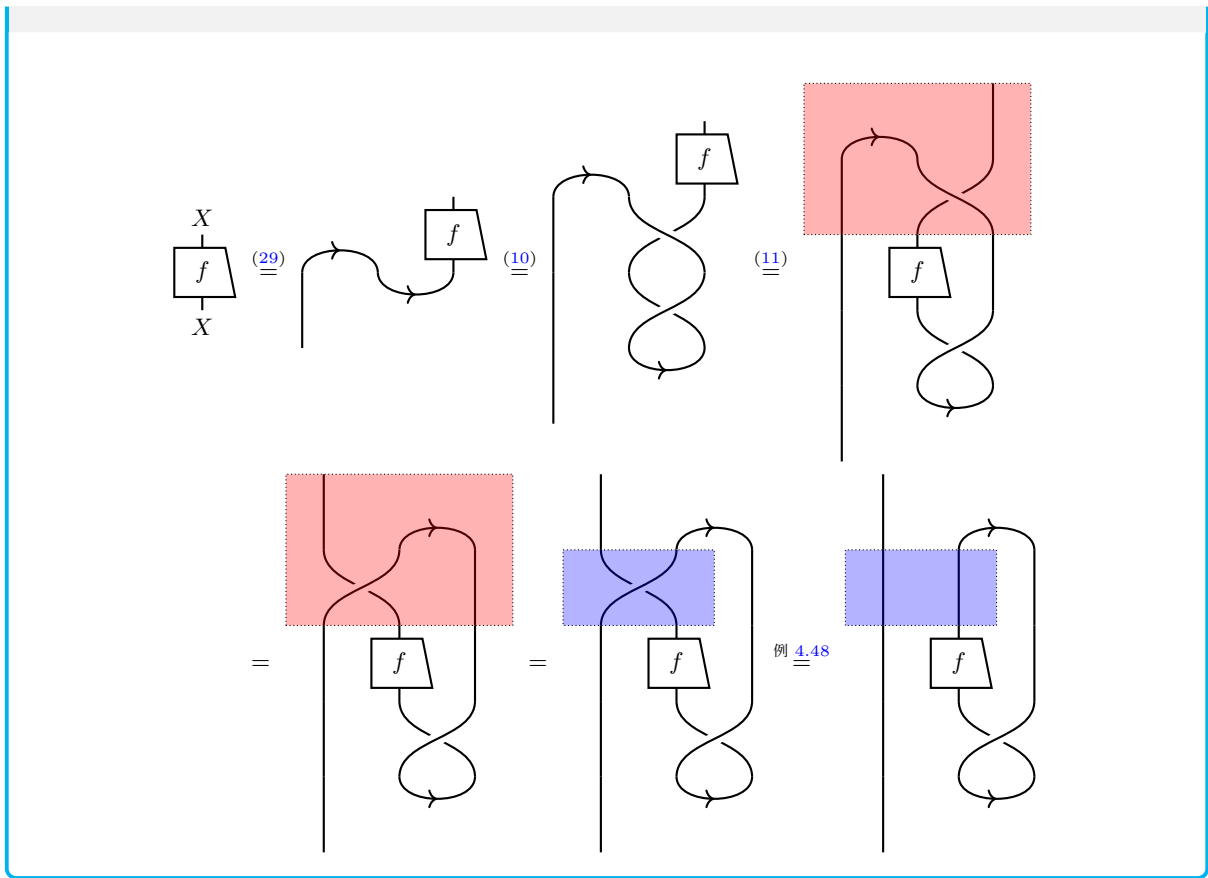
\begin{align*}
& \qquad \backslash q{
\qquad \backslash qasym[name={\ (f\ )}]
\qquad \backslash symbolI{\ (X\ )}\backslash symbolO{\ (X\ )}
}& \stackrel{\text{\ref{eq:snake}}}{=}
& \backslash q{
\qquad \backslash qcap\backslash qasym[name={\ (f\ )}]\backslash n
\qquad \backslash qwire\backslash qcup
}& \stackrel{\text{\ref{eq:inverse:braid}}}{=} \backslash q{
\qquad \backslash qcap\backslash qasym[name={\ (f\ )}]\backslash n
\qquad \backslash qwire\backslash qbraidinv\backslash n
\qquad \backslash qwire\backslash qbraid\backslash n
\qquad \backslash qwire\backslash qcup
}& \stackrel{\text{\ref{cond:naturality:braid}}}{=} \backslash q{
\qquad \backslash qcap\backslash qwire\backslash n
\qquad \backslash qwire\backslash qbraidinv\backslash n
\qquad \backslash qwire\backslash qasym[name={\ (f\ )}]\backslash qwire\backslash n
\qquad \backslash qwire\backslash qbraid\backslash n
\qquad \backslash qwire\backslash qcup

```

```

\qbb[red][1,4]
}\
&=\q{
\qwire\qcap\n
\qbraid\qwire\n
\qwire\qasym[name={\ (f\)}]\qwire\n
\qwire\qbraid\n
\qwire\qcup
\qbb[red][1,4]
}=\q{
\qwire\qcap\n
\qbraid\qwire\n
\qwire\qasym[name={\ (f\)}]\qwire\n
\qwire\qbraid\n
\qwire\qcup
\qbb[blue][3]
}\stackrel{\text{例}}{\ref{len:copybraid}}{=}\q{
\qwire\qcap\n
\qwire\qwire\qwire\n
\qwire\qasym[name={\ (f\)}]\qwire\n
\qwire\qbraid\n
\qwire\qcup
\qbb[blue][3,4]
}
\end{align*}

```

4.7 ピボタル圏

例 4.50

```

\begin{equation}
\label{cond:naturality:pivotal}
\forall \mathbf{q} \{ \text{qasym}[name={\f}] \} \text{symbolI}{\mathbb{X}} \} \text{symbolO}{\mathbb{Y}} \} \text{colon}
\mathbf{q}[\text{scale}=0.5] \{
\text{qwire} \text{qcap}[s=4] \backslash \text{n}
\text{qwire} \text{qwire} \text{qasym}[name={\f}] \backslash \text{qwire} \text{qwire} \backslash \text{n}
\text{qcup}[n=4] \text{qwire} \text{qmv}[-1,-1] \text{qasym}[name={\pi_X}]
\} = \mathbf{q} \{
\text{qasym}[name={\pi_Y}] \backslash \text{n}
\text{qasym}[name={\f}] \}
\}
\end{equation}

```

$$\forall \begin{array}{c} Y \\ \hline \boxed{f} \\ \hline X \end{array} : \text{dual construction} = \begin{array}{c} \boxed{\pi_Y} \\ \hline \boxed{f} \\ \hline X \end{array} \quad (37)$$

例 4.51

```

\begin{equation}
\label{def:dualrev}
\q{
\qcaprev\n
\symbolI{\(X^T\)}\symbolI[2]{\(X\)}
}\coloneq\q{
{
\qcap \n
\qwire \qwireupup \n
\qwire \qasym[name={\(\pi_x\)}] \n
}\qqad\q{
\qcupprev
\symbolI{\(X\)}\symbolI[2]{\(X^T\)}
}\coloneq\q{
{
\qasym[name={\(\pi_X^{-1}\)}]\qwire\n
\qwireupup\qwire\n
\qcup
}
}
\end{equation}

```

$$X^T \curvearrowright X := \text{wire with } \pi_x \text{ and U-wire above} \quad X \curvearrowleft X^T := \text{wire with } \pi_X^{-1} \text{ and U-wire below} \quad (38)$$

例 4.52

```

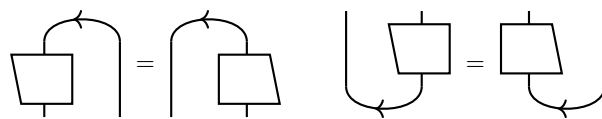
\begin{equation}
\label{eq:sliding:rev}
\q{
\qcaprev\n
\qtrans\qwire\n
}=\q{
\qcaprev\n
}

```

```

\qwire\qasym
}\qqad\q{
\qwire\qtrans\n
\qcupprev
}=\q{
\qasym\qwire\n
\qcupprev
}
\end{equation}

```



(39)

例 4.53

```

\begin{gather}
\q{
\qwireuu[label={\langle X^{TT} \rangle}] \n
\qasym[name={\langle \pi_X \rangle}] \n
\qwireup[label={\langle X \rangle}]
}=\q{
\qwireuu[label={\langle X^{TT} \rangle}] \qcap \n
\qbraid\qwired[label={\langle X^T \rangle}] \n
\qasym[name={\langle \theta_{X^{-1}} \rangle}] \qcupprev \n
\qwireup[label={\langle X \rangle}]
}\label{twist:pivotal} \n
\q{
\qwireup[label={\langle X \rangle}] \n
\qasym[name={\langle \theta_X \rangle}] \n
\qwireup[label={\langle X \rangle}]
}=\q{
\qwireup[label={\langle X \rangle}] \n
\qasym[name={\langle \pi_{X^{-1}} \rangle}] \n
\qwireuu[label={\langle X^{TT} \rangle}] \qcap \n
\qbraid\qwired[label={\langle X^T \rangle}] \n
\qwire[label={\langle X \rangle}] \qcupprev
}\label{pivotal:twist}
\end{gather}

```

$$\pi_X = \theta_X^{-1} \begin{matrix} X^{TT} \\ \text{loop } X^T \end{matrix} \quad (40)$$

$$\theta_X = \pi_X^{-1} \begin{matrix} X \\ \text{loop } X^T \end{matrix} \quad (41)$$

例 4.54

```

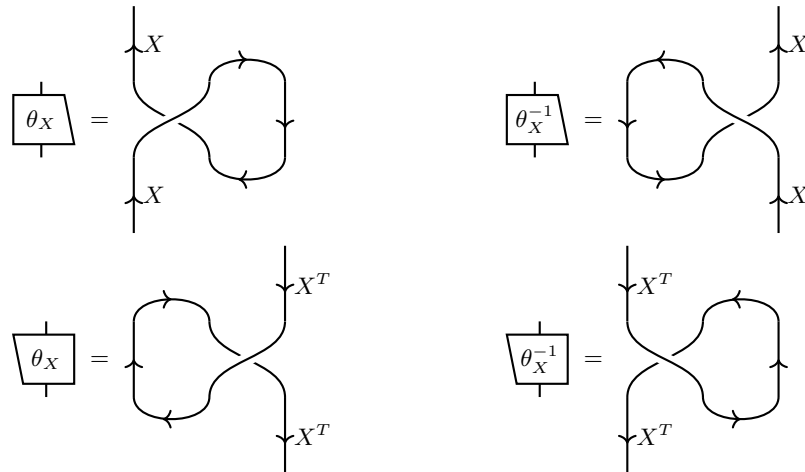
\begin{align*}
&\q{\qasym[name={\(\theta_X\)}}} \\
&\&=\q{ \\
&\quad \qwireu[label={\ (X\)}] \qcap \n \\
&\quad \qbraid \qwired \n \\
&\quad \qwireu[label={\ (X\)}] \qcuprev \\
&\}&\q{\qasym[name={\ (\theta_X^{-1}\)}]} \\
&\&=\q{ \\
&\quad \qcuprev \qwireu[label={\ (X\)}] \n \\
&\quad \qwired \qbraidinv \n \\
&\quad \qcup \qwireu[label={\ (X\)}]} \\
&\}\ \\
&\q{\qtrans[name={\ (\theta_X\)}]} \\
&\&=\q{ \\
&\quad \qcap \qwired[label={\ (X^T\)}] \n \\
&\quad \qwireu \qbraid \n \\
&\quad \qcuprev \qwired[label={\ (X^T\)}]} \\
&\}&\q{\qtrans[name={\ (\theta_X^{-1}\)}]} \\
&\&=\q{ \\
&\quad \qwired[label={\ (X^T\)}] \qcuprev \n \\
&\quad \qbraidinv \qwireu \n \\
&\quad \qwired[label={\ (X^T\)}] \qcup

```

```

}
\end{align*}

```

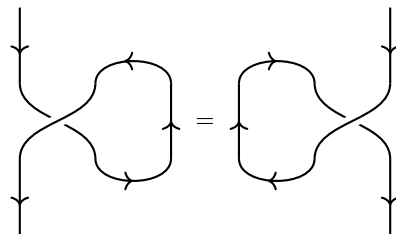


例 4.55 リボン圏

```

\begin{equation}
\label{def:ribboncategory}
\q{
\qwired\qcaprev\n
\qbraid\qwireu\n
\qwired\qcup
}=\q{
\qcap\qwired\n
\qwireu\qbraid\n
\qcupprev\qwired
}
\end{equation}

```



(42)


```

\qasym[name={\langle g \rangle}]\qwiring
\qcuprev
]=\operatorname{Tr}\left(\q{
\qasym[name={\langle f \rangle}]\n
\qasym[name={\langle g \rangle}
}\right)
\end{equation}

```

$$\operatorname{Tr} \left(\begin{array}{c} \boxed{g} \\ \boxed{f} \end{array} \right) = \begin{array}{c} \boxed{g} \\ \boxed{f} \end{array} \stackrel{(31)}{=} \begin{array}{c} \boxed{f} \\ \boxed{g} \end{array} \stackrel{(39)}{=} \begin{array}{c} \boxed{f} \\ \boxed{g} \end{array} = \operatorname{Tr} \left(\begin{array}{c} \boxed{f} \\ \boxed{g} \end{array} \right) \quad (43)$$

例 4.58 対象の次元

```

\[
\q{\qscalar[name={\langle \operatorname{dim} \rangle(X)}]}
\coloneqq \q{\qscalar[name={\langle \operatorname{Tr} \rangle(\operatorname{id}_X)}]}
= \q{\qcap n \qcuprev}
\]

```

$$\text{dim}(X) := \operatorname{Tr}(\operatorname{id}_X) = \begin{array}{c} \circlearrowleft \end{array}$$

4.7.2 コンパクト圏

例 4.59 コンパクト圏

```

\begin{equation}
\label{def:compact}
\q{\qasym[name={\langle \pi_X \rangle}} = \q{
\qwiringuu[label={\langle X^{\top} \rangle}]\qcap n
\qsym\qwiringd[label={\langle X^{\top} \rangle}]\n
\qwiring[label={\langle X \rangle}]\qcuprev
}
\end{equation}

```

$$\pi_X = \text{braid diagram} \quad (44)$$

4.7.3 色

例 4.60

```

\begin{equation}
\label{eq:tr:hopf}
\operatorname{Tr}\left(
\begin{array}{c}
\mathcal{Q} \\
\text{braid}[L \text{ color=blue, R color=orange}] \\
\text{braid}[L \text{ color=orange, R color=blue}]
\end{array}
\right)
= \mathcal{Q} \left[
\begin{array}{c}
\text{cap}[hlen=4, frame color=orange] \\
\text{wire}[color=orange] \text{cap}[frame color=blue] \\
\text{braid}[L \text{ color=blue, R color=orange}] \\
\text{braid}[L \text{ color=orange, R color=blue}] \\
\text{wire}[vlen=2, color=blue] \\
\text{wire}[color=orange] \\
\text{cup}[frame color=blue] \\
\text{wire}[vlen=4, color=orange] \\
\text{cup}[hlen=4, frame color=orange]
\end{array}
\right]
= \mathcal{Q} \left[
\begin{array}{c}
\text{cap}[frame color=blue] \\
\text{cap}[frame color=orange] \\
\text{space} \\
\text{braidinv}[L \text{ color=orange, R color=blue}] \\
\text{wireup}[vlen=2, color=blue] \\
\text{braidinv}[L \text{ color=blue, R color=orange}] \\
\text{wire}[vlen=2, color=orange] \\
\text{cup}[frame color=blue] \\
\text{cup}[frame color=orange]
\end{array}
\right]
\end{array}
\end{equation}

```


$$\left(\begin{array}{c} Y \\ \downarrow \\ \boxed{f} \\ \downarrow \\ X \end{array} \right)^\dagger := \begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ \boxed{f} \\ \downarrow \\ Y \end{array} \quad (46)$$

$$\left(\boxed{f} \right)^{\dagger\dagger} = \left(\boxed{f} \right)^\dagger = \boxed{f} \quad (47)$$

$$\left(\left| \right. \right)^\dagger = \left| \right. \quad (48)$$

$$\begin{array}{c} \boxed{f} \\ \downarrow \\ \boxed{g} \end{array} = \boxed{g \circ f} \quad (49)$$

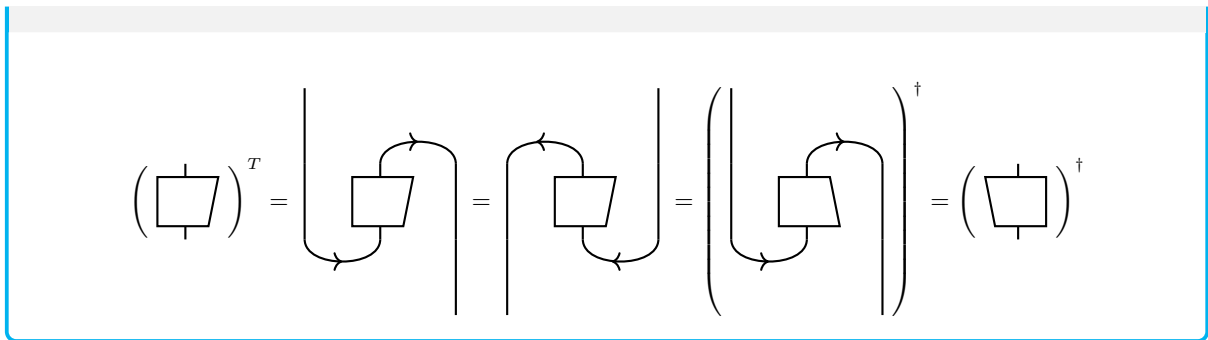
4.8.2 共役ボックス

例 4.62

```

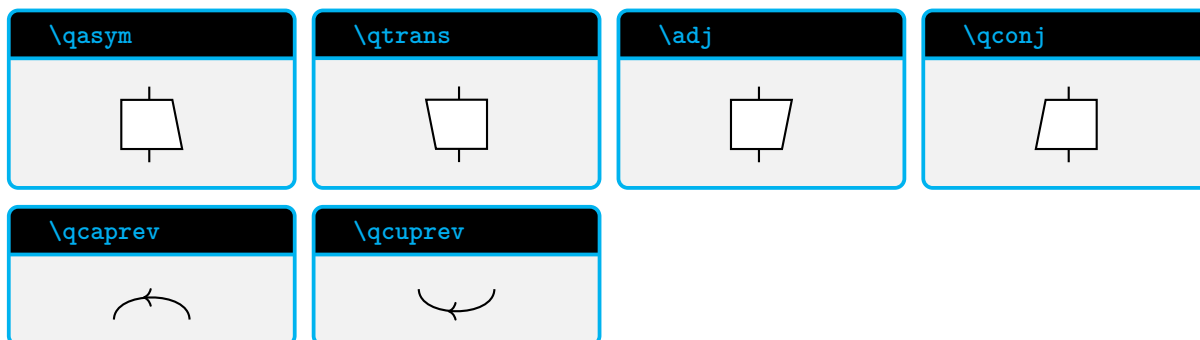
\begin{align*}
& \left( \left\{ \begin{array}{c} \text{qadj} \end{array} \right\} \right)^T \\
& = \left\{ \begin{array}{c} \text{wire} \text{qcap} \\ \text{wire} \text{qadj} \text{wire} \\ \text{qcup} \text{wire} \end{array} \right\} \\
& = \left\{ \begin{array}{c} \text{qcaprev} \text{wire} \\ \text{wire} \text{qadj} \text{wire} \\ \text{wire} \text{qcuprev} \end{array} \right\} \\
& = \left( \left\{ \begin{array}{c} \text{wire} \text{qcap} \\ \text{wire} \text{qasym} \text{wire} \\ \text{qcup} \text{wire} \end{array} \right\} \right)^\dagger \\
& \left. \right)^{\dagger} = \left( \left\{ \text{qtrans} \right\} \right)^{\dagger} \\
\end{align*}

```



5 素子一覧

<code>\qwire</code> 	<code>\qbox</code> 	<code>\qstate</code> 	<code>\qeffect</code>
<code>\qscalar</code> 	<code>\qunitob</code> 	<code>\qmul</code> 	<code>\qcomul</code>
<code>\qunit</code> 	<code>\qcounit</code> 	<code>\qspider</code> 	<code>\qbraid</code>
<code>\qbraidinv</code> 	<code>\qsym</code> 	<code>\qcap</code> 	<code>\qcup</code>
<code>\qwireu</code> 	<code>\qwired</code> 	<code>\qwireuu</code> 	<code>\qwiredd</code>



参考文献

- [1] Till Tantau, *The TikZ and PGF Packages Manual for Version 3.1.10*, Institut für Theoretische Informatik, Universität zu Lübeck, n.d., <https://github.com/pgf-tikz/pgf> (retrieved March 22, 2025).
- [2] Anonymous, *Genius Sorting Algorithm*, 4chan Programming Board, January 20, 2011, <https://dis.4chan.org/read/prog/1295544154> (accessed January 20, 2011; link currently inactive).
- [3] gfx, 常識を覆すソートアルゴリズム！ その名も”sleep sort”!, Hatena Diary, May 19, 2011, <https://gfx.hatenadiary.org/entry/20110519/1305810786>.
- [4] LiteratePrograms, *Turing Machine Simulator in L^AT_EX*, https://literateprograms.org/turing_machine_simulator__latex_.html, n.d., retrieved March 22, 2025.
- [5] Overleaf, *L^AT_EX is More Powerful than You Think: Computing the Fibonacci Numbers and Turing Completeness*, https://www.overleaf.com/learn/latex/Articles/LaTeX_is_More_Powerful_than_you_Think_-_Computing_the_Fibonacci_Numbers_and_Turing_Completeness, n.d., retrieved March 22, 2025.

Changelog

- 1.1.2 新名亮太 (2025-07-28) — 英語版ドキュメンテーション (qworld_en.pdf) および対応する T_EX ソースファイル (qworld_en.tex) のタイプミスを修正した。この変更は英語版ドキュメンテーション (qworld_en.pdf) と T_EX ソースファイル (qworld_en.tex) のみに影響し、スタイルファイルには影響しない。
- 1.1.1 新名亮太 (2025-04-14)
- Added**
- 彩色機能
図式表現において、組紐、シンメトリー、キャップ、カップ等に対して色属性を指定できるようになった。対象の識別に有効な視覚的手がかりを提供する。
- Fixed**
- ワイヤーや組紐、シンメトリー、キャップ、カップの曲線処理が修正され、より滑らかな描画が可能となった。
- 1.1.0 新名亮太 (2025-04-03)

Changed

- コマンドの引数仕様の刷新

以下のコマンドがアップデートされ、従来の必須引数から柔軟なキーバリュー形式の柔軟なオプション引数へと変更された:

- `\symbolI`
- `\symbols`
- `\symbolS`
- `\symbolO`
- `\symboln`
- `\symbolN`

旧仕様 `\symbolI[i]{ID}{text}` [位置オプション]

新仕様 `\symbolI[i]{text}[id=ID, 位置オプション]`

この変更により、ID の指定を省略できるようになり、従来の `\symbolI{ID}{text}` に比べ、ID が不要な場面では `\symbolI{text}` と記述するだけで済むようになった。結果として、記述量が削減されコードの可読性が向上した。

Added

- 英語のドキュメントの追加

パッケージのユーザーガイド (英語版) を新たに追加した。

1.0.0 新名亮太 (2025-04-01) — 初回リリース

License and Copyright

This package is distributed under the **LaTeX Project Public License (LPPL)**, version 1.3c or later. For details, see <https://www.latex-project.org/lppl.txt>.

Copyright ©2025 Niina Ryota

You are free to distribute and modify this package under the terms of LPPL. However, any modified versions **must not** be distributed under the original name, and the original author must be credited.